ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 99.

Α2. Σελίδα 142 σχολικού βιβλίου .

Α3. Σελίδα 143 σχολικού βιβλίου σχόλιο.

Α4. (α)Λάθος (β)Σωστό (γ)Σωστό (δ)Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \quad \text{και} \quad f(x)\in A_g\}=\left\{x>1 \quad \text{και} \quad \dfrac{x+1}{x-1}>0\right\}=\{x>1 \quad \text{και} \quad x<-1 \quad \text{ή} \quad x>1\}$

Διότι $:\dfrac{x+1}{x-1}>0\Leftrightarrow (x+1)(x-1)>0\Leftrightarrow x^2-1>0\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow |x|>1\Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>1$

Άρα $A_{g\circ f}=(1,+\infty)$ και $(gof)(x)=g(f(x))=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Β2. Έχουμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right), x>1$

η οποία ισοδύναμα γράφεται $\varphi(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

Η φ παραγωγίσιμη στο $A=(1,+\infty)$ με

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-x-1}{x^2-1}=-\dfrac{2}{x^2-1}<0$ για κάθε $x>1$ άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της .

Η φ συνεχής στο $A=(1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι

$\varphi(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)\right)=(0,+\infty)$ διότι:

- Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, θέτουμε $u=\frac{x+1}{x-1}$, για $x>1$

$u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

$$\text{Άρα } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{u\to1}\ln u=0$$

- Για το $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, θέτουμε $u=\frac{x+1}{x-1}$, για $x>1$

$u_0=\lim\limits_{x\to1^+}u=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)\cdot\frac{1}{x-1}=+\infty$

$$\text{Άρα } \lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

Β3. (i) Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(1,+\infty)$ οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι το σύνολο τιμών της φ άρα $A_{\varphi^{-1}}=\varphi(A)=(0,+\infty)$

Άρα $\varphi(x)=y$ με $x\in(1,+\infty)$ και $y\in(0,+\infty)$

$\varphi(x)=y\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=y\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}=e^y\Leftrightarrow x+1=x\cdot e^y-e^y\Leftrightarrow1+e^y=xe^y-x$

$\Leftrightarrow1+e^y=x\left(e^y-1\right)\Leftrightarrow x=\frac{e^y+1}{e^y-1}$, άρα $\varphi^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}, x>0$

(ii) Η $\varphi^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ είναι συνεχής στο $A_{\varphi^{-1}}=(0,+\infty)$

<u>Κατακόρυφη Ασύμπτωτη</u>

$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+1\right)\cdot\frac{1}{e^x-1}=+\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+1\right)=2$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-1\right)=0$ και $e^x-1>0$ καθώς $x\to0^+$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της φ^{-1}

<u>Οριζόντια Ασύμπτωτη</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ άρα η ευθεία με εξίσωση $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της φ^{-1} στο $+\infty$

Β4. Η συνάρτηση $g(x)=\ln x$ έχει ρίζα το 1 και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Άρα $E=\int_1^e |g(x)|dx=\int_1^e \ln x dx=\int_1^e (x)'\ln x dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$

$$=[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=[x\ln x-x]_1^e=(e\ln e-e)-(\ln 1-1)=1\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σημείο $A(0,f(0))$ ανήκει στην $y=-x-2$ άρα $f(0)=-2\Leftrightarrow -\beta=-2\Leftrightarrow \boxed{\beta=2}$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με την παράγωγο της f στο $x=0$ επομένως $f'(0)=-1$

Παραγωγίζοντας την f παίρνουμε $f'(x)=x^2+\alpha e^x+\alpha xe^x-\beta e^x$

$f'(0)=-1\Leftrightarrow \alpha-\beta=-1\overset{\beta=2}{\Leftrightarrow}\alpha-2=-1\Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ έχουμε $\boxed{f(x)=\frac{1}{3}x^3+xe^x-2e^x}$

Γ2.

(i) Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=x^2+e^x+xe^x-2e^x=x^2+xe^x-e^x$$

$$f''(x)=2x+e^x+xe^x-e^x=2x+xe^x$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow x(2+e^x)=0\Leftrightarrow x=0$, αφού $2+e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f''(x)>0\Leftrightarrow x(2+e^x)>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$,κυρτή στο $[0,+\infty)$ και το σημείο $A\big(0,f(0)\big)$ ή $A(0,-2)$ είναι το σημείο καμπής της .

(ii) Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$x^3+3x+6<6e^x-3xe^x \Leftrightarrow x^3+3xe^x-6e^x<-3x-6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3+xe^x-2e^x<-x-2 \Leftrightarrow f(x)<-x-2$$

Η εφαπτομένη της f στο σημείο A είναι η ευθεία με εξίσωση $y=-x-2$

Γνωρίζουμε ότι, αν μια συνάρτηση είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ΄΄πάνω΄΄(αντιστοίχως ΄΄πάνω΄΄) από την γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους

Η ανίσωση $f(x)+x+2<0 \Leftrightarrow f(x)<-x-2$

Άρα θέλουμε η γραφική παράσταση της f να είναι κάτω από την εφαπτομένης της στο σημείο $A\big(0,f(0)\big)$,αυτό συμβαίνει στο διάστημα που η f είναι κοίλη άρα

$f(x)<-x-2 \Leftrightarrow x<0$

Γ3. Ισχύει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$(αφού η f κοίλη) και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$(αφού η f κυρτή)

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f'

$$f'(\Delta_1)=\Big[f'(0),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\Big)=[-2,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+xe^x-e^x\right)=+\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0$$

Το $0\in f'(\Delta_1)$άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$, το x_1 μοναδικό διότι η f' γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 άρα και 1-1

$$f'(\Delta_2)=\Big[f'(0),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\Big)=[-2,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+xe^x-e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+x-1\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Διότι

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

Το $0\in f'(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$, το x_2 μοναδικό διότι η f' γνησίως αύξουσα στο Δ_2 άρα και 1-1

Από τα διαστήματα μονοτονίας της f' και τις ρίζες της ,θα βρούμε το πρόσημό της

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$ $\Vert$ $\nearrow$	0	$\nearrow$

Έστω $x\in(-\infty,x_1)$ τότε $x<x_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Έστω $x\in(x_1,0)$ τότε $x_1<x<0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Έστω $x\in(0,x_2)$ τότε $0<x<x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Έστω $x\in(x_2,+\infty)$ τότε $x_2<x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x_2)<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Άρα το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο .

Γ4.

- $$\int_{x_1}^{0} xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0} f'(x)dx=-x_1f'(x_1)-\left[f(x)\right]_{x_1}^{0}=-f(0)+f(x_1)=2+f(x_1)>0$$

Στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $x_1<0<x_2$

$$x_1<0\Leftrightarrow f(x_1)>f(0)\Leftrightarrow f(x_1)>-2\Leftrightarrow \boxed{f(x_1)+2>0}$$

- $$\int_{0}^{x_2} xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_{0}^{x_2}-\int_{0}^{x_2} f'(x)dx=x_2f'(x_2)-\left[f(x)\right]_{0}^{x_2}=-f(x_2)+f(0)=-f(x_2)-2>0$$

$$x_2 > 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(0) \Leftrightarrow f(x_2) < -2 \Leftrightarrow \boxed{-f(x_2) - 2 > 0}$$

Άρα $\left(\int_{x_1}^{0} xf''(x)dx\right)\cdot\left(\int_{0}^{x_2} xf''(x)dx\right) > 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη στο $A = (0,+\infty)$ με $f'(x) = e^x + xe^x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x \in A$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο A

Επίσης $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(xe^x + \ln x) = -\infty$

Για $x < 1$ ισχύει λόγω μονοτονίας ότι $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < e$

Επομένως στο $\Delta = (0,1)$ το $f(\Delta) = (-\infty, e)$, ο αριθμός 0 ανήκει σε αυτό άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$,το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και 1-1 . Δηλαδή $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = x_0$

Δ2. $f''(x) = 2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}$ (δε μπορούμε να βρούμε το πρόσημό της)

$f'''(x) = 3e^x + xe^x + \frac{2}{x^3} > 0$ για κάθε $x \in A$ επομένως η f'' είναι γνησίως αύξουσα

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της.

Η f'' συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0,+\infty)$ άρα

$$f''(A) = \left(\lim_{x\to 0} f''(x), \lim_{x\to+\infty} f''(x)\right) = (-\infty,+\infty)$$

Διότι: $\lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0}\left(2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to 0}\left(2e^x + xe^x - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

Ο αριθμός $0 \in f''(A)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f''(x_1) = 0$, το x_1 μοναδικό διότι η f'' γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(x_1) \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} x > x_1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(x_1) \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < x_1$$

x	0	x_1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Η f κοίλη στο $(0,x_1]$ και κυρτή στο $[x_2,+\infty)$. Το σημείο $A(x_1,f(x_1))$ είναι σημείο καμπής .

Δ3.

(i) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $e^{x_0}+2\ln x_0>0$ **(1)**

Αφού το x_0 είναι ρίζα της f ισχύει $f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0e^{x_0}+\ln x_0=0\Leftrightarrow \boxed{\ln x_0=-x_0e^{x_0}}$ **(2)**

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε

$$e^{x_0}-2x_0e^{x_0}>0\Leftrightarrow e^{x_0}(1-2x_0)>0\Leftrightarrow 1-2x_0>0\Leftrightarrow x_0<\frac{1}{2}$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\boxed{x_0<\frac{1}{2}}$

Αν $x_0=\frac{1}{2}$ τότε $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0$ άτοπο λόγω της υπόθεσης

Από τη σχέση $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}|f(x)|dx=\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx\neq 0$ προκύπτει ότι $f(x)>0$ στο διάστημα $\left[x_0,\frac{1}{2}\right]$ ή στο $\left[\frac{1}{2},x_0\right]$

Αν $x_0>\frac{1}{2}$ τότε $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}|f(x)|dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}|f(x)|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx$ άρα

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx=\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx-\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx=0\Leftrightarrow 2\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx=0\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(x)dx=0$$

Επίσης άτοπο άρα $x_0<\frac{1}{2}$

Β. Τρόπος

$$x_1 < \frac{1}{2} \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x_1) < f''\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{e} + \frac{1}{2}\sqrt{e} - 4 \Leftrightarrow 0 < \frac{4\sqrt{e}+\sqrt{e}-8}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{5\sqrt{e}-8}{2}$$

$5\sqrt{e} > 8 \Leftrightarrow 25e > 64$ το οποίο ισχύει αν θεωρήσουμε $e \approx 2,71$

Το οποίο ισχύει και επειδή $x_0 < x_1$ άρα $x_0 < \frac{1}{2}$

(αν κάποιος χρησιμοποιήσει αυτόν τον τρόπο το δεδομένο με το ολοκλήρωμα είναι περιττό , αλλά κρίναμε ότι αυτός ο τρόπος λύσης είναι δύσκολο να το σκεφτεί μαθητής αλλά και να το σκεφτεί προφανώς θα καταλάβει ότι είναι περιττό)

(ii) για το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x_1)-F(x_0)}{(2x_0)^x}$ έχουμε ότι στο διάστημα $[x_0, x_1]$ η f είναι μη αρνητική αφού είναι γνησίως αύξουσα και

$$x_0 < x < x_1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(x) < f(x_1) \Leftrightarrow 0 < f(x) < f(x_1)$$

Η παράγουσα F της f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_1]$ επομένως $F(x_1)-F(x_0) > 0$

Επίσης $x_0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0 < 1$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x_0)^x = 0$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ όταν $0 < \alpha < 1$)

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(2x_0)^x} = +\infty$ αφού $(2x_0)^x > 0$

Επομένως $$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x_1)-F(x_0)}{(2x_0)^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(F(x_1)-F(x_0)\right)\cdot\frac{1}{(2x_0)^x}\right) = (+\infty)$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < x_0$ ισχύει : $f(x) < (x-x_0)\cdot f'(x_1)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[x, x_0]$ με $x > 0$

Υπάρχει $\kappa \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\kappa) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0 - x} \Leftrightarrow f'(\kappa) = \frac{-f(x)}{x_0 - x} \Leftrightarrow f'(\kappa) = \frac{f(x)}{x - x_0}$$

$\kappa < x_1$ και η f' στο διάστημα $[\kappa, x_1]$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού η f κοίλη άρα

$$f'(\kappa) > f'(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-x_0} > f'(x_1) \Leftrightarrow f(x) < f'(x_1)\cdot(x-x_0)$$