

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 15 Απριλίου 2026  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Μονάδες 7

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

**A3.** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Μονάδες 3

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα είναι και το ολικό της ελάχιστο.

(β) Το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  δεν υπάρχει.

(γ) Αν  $f', g'$  συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $[a, \beta]$  τότε

$$\int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta + \int_\beta^a f(x)g'(x)dx$$

(δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

(ε) Για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , ισχύει  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f:(1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ και } g:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \ln x$$

**B1.** Να ορίσετε την συνάρτηση  $g \circ f$ 

Μονάδες 5

$$\text{Αν } \varphi(x) = (g \circ f)(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), x > 1 \text{ τότε}$$

**B2.** Να δείξετε ότι η  $\varphi$  είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Μονάδες 6

**B3. (i)** Να αποδείξετε ότι η  $\varphi$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $\varphi^{-1}$ 

Μονάδες 5

**(ii)** Αν  $\varphi^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x > 0$  να βρείτε την κατακόρυφη και την οριζόντια ασύμπτωτη της  $\varphi^{-1}$

Μονάδες 4

**B4.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e$ 

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha xe^x - \beta e^x, x \in \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στην ευθεία  $y = -x - 2$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση  $x^3 + 3x + 6 < 6e^x - 3xe^x$

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο .

Μονάδες 6

Έστω  $x_1$  η θέση του τοπικού μεγίστου και  $x_2$  η θέση του τοπικού ελαχίστου

Γ4. Να αποδείξετε ότι  $\left(\int_{x_1}^0 xf''(x) dx\right) \cdot \left(\int_0^{x_2} xf''(x) dx\right) > 0$

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = xe^x + \ln x$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$  η οποία ανήκει στο διάστημα  $(0, 1)$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής  $A(x_1, f(x_1))$

Μονάδες 6

Αν για την ρίζα  $x_0$  της συνάρτησης  $f$  και την τετμημένη  $x_1$  του σημείου καμπής

ισχύουν  $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \neq 0$  και  $x_0 < x_1$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3ΘΟ(ε)

Δ3 (i) Να αποδείξετε ότι  $e^{x_0} + 2 \ln x_0 > 0$

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{(2x_0)^x}$ , όπου  $F$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $(0, +\infty)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x < x_0$  ισχύει:  $f(x) < (x - x_0) \cdot f'(x_1)$

Μονάδες 5