

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 10 Ιανουαρίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 114
A2. Σελίδα 76 σχολικού βιβλίου.
A3. Σελίδα 23 σχολικού βιβλίου.
A4. (α)Σωστό (β)Λάθος (γ)Λάθος (δ)Λάθος (ε)Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$A_{h \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h\}$$
$$A_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x - 3 \geq 0\}$$
$$A_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq 3\}$$

Επομένως $A_{h \circ g} = [3, +\infty)$ και $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = (x - 3)^2 + 3$

B2. Για τη συνάρτηση $f(x) = (x - 3)^2 + 3$ με πεδίο ορισμού $A = [3, +\infty)$ έχουμε :

έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ τότε :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2$$
$$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 3 < (x_2 - 3)^2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Σχόλιο : $3 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 3 < x_2 - 3$, οπότε επιτρέπεται να υψώσουμε στο τετράγωνο

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [3, +\infty)$

Η f συνεχής στο A ως πολυωνυμική και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [3, +\infty)$$

Αφού : $f(3) = (3-3)^2 + 3 = 3$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 6x + 12) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

B3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο A άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

Δηλαδή $A_{f^{-1}} = [3, +\infty)$

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x-3)^2 + 3 = y \Leftrightarrow (x-3)^2 = y-3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{y-3}$$

$$\Leftrightarrow |x-3| = \sqrt{y-3} \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{y-3} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-3} + 3, y \geq 3$$

Άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3} + 3, x \geq 3$

B4.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{f(x)-3}{f^{-1}(x)-3} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2 \cdot \sqrt{x-3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} [(x-3) \cdot \sqrt{x-3}] = 0$$

(ii) για το $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{f(x)-3}{f^{-1}(x)-3} \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \right]$ από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{f(x)-3}{f^{-1}(x)-3} \right] = 0, \text{ θέτουμε για λόγους ευκολίας } \frac{f(x)-3}{f^{-1}(x)-3} = \varphi(x), x \geq 3$$

Άρα ψάχνουμε το $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\varphi(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \right]$

$$\left| \varphi(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \right| = |\varphi(x)| \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \right| \leq |\varphi(x)| \cdot 1$$

Άρα $\left| \varphi(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \right| \leq |\varphi(x)| \Leftrightarrow -|\varphi(x)| \leq \varphi(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \leq |\varphi(x)|$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = 0$ άρα και $\lim_{x \rightarrow 3} |\varphi(x)| = 0$ από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{f(x)-3}{f^{-1}(x)-3} \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right) \right] = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. (i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^2(x) - e^{2x} = 1 + 2e^x \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = (e^x + 1)^2$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της f (αν υπάρχουν)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ αδύνατη}$$

Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f συνεχής διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R}

(ii) $f^2(x) = (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^x + 1| \Leftrightarrow |f(x)| = e^x + 1$, αφού $e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$

Άρα αφού $|\eta\mu(f(0) - 2)| = |f(0) - 2|$ ισχύει ότι $f(0) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 2$

Επομένως αφού η f διατηρεί πρόσημο και $f(0) = 2$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$

Γ2. Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες $A(0, f(0))$ δηλαδή $A(0, 2)$ και η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, 2)$ είναι :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 2}$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο τυχαίο σημείο της $B(x_0, g(x_0)), x_0 \in \mathbb{R}$ είναι:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \boxed{y = g'(x_0)x + g(x_0) - x_0 g'(x_0)}$$

Για να εφάπτεται η $y = x + 2$ στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g πρέπει και αρκεί

$$g'(x_0) = 1 \text{ και } g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0) = 2$$

- $g'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -x_0 - 1 = 1 \Leftrightarrow -x_0 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = -2}$
- $g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_0^2 - x_0 - x_0(-x_0 - 1) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_0^2 + x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4$
 $\boxed{x_0 = 2}$ ή $\boxed{x_0 = -2}$

Η κοινή τους λύση (υπάρχει) είναι η $x_0 = -2$

Επομένως η $y = x + 2$ είναι η κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(-2, g(-2))$ αντίστοιχα.

Γ3. Θα αποδείξουμε ότι $g(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει

$x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x_0) = \frac{1}{2}$

$$g(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει}$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Άρα η g έχει μέγιστο στη θέση $x = -1$ το $\frac{1}{2}$

Για την συνάρτηση $f(x) = e^x + 1$ ισχύει ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $e^x > 0 \Leftrightarrow e^x + 1 > 1$ και $g(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Γ4. (i) Θέτουμε $h(x) = f(x) - 3 + x^3, x \in \mathbb{R}$

Κάνοντας πράξεις προκύπτει :

$$h(x) = f(x) - 3 + x^3 \Leftrightarrow h(x) = e^x + 1 - 3 + x^3 \Leftrightarrow \boxed{h(x) = e^x + x^3 - 2}$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad \text{(1)}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - 2 < x_2^3 - 2 \quad \text{(2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι $h(x_1) < h(x_2)$ άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα

Η h συνεχής στο $A = \mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Το x_0 μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1

(ii) Ισχύει $h(x_0) = 0$ δηλαδή $e^{x_0} + x_0^3 - 2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + e^x - 2}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{h(x) - h(x_0)}{(x - x_0)} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^2} \right) = +\infty$$

,αφού η h είναι παραγωγίσμη στο \mathbb{R}

$$\text{Οπότε το } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{(x - x_0)} = h'(x_0) = e^{x_0} + 3x_0^2 > 0$$

Το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^2} = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 = 0$ και $(x - x_0)^2 > 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f με $x_0 \geq 0$

Για $x_0 = 0$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει εξίσωση $y = 0(x'x)$ και δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες άρα $x_0 > 0$

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της M είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow \boxed{y = 2x_0x - x_0^2}$

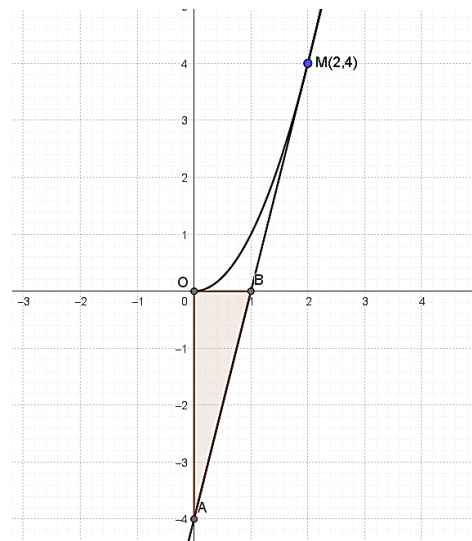
Για $x = 0$ έχουμε $y = -x_0^2$ άρα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -x_0^2)$

Για $y = 0$ έχουμε $x = \frac{x_0}{2}$ άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot |-x_0^2| \cdot \left|\frac{x_0}{2}\right| = \frac{1}{4} |x_0^3| = \frac{1}{4} x_0^3$$

Από τα δεδομένα ισχύει $\frac{1}{4} x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2$



Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι $y = 4x - 4$

Δ2. Ισχύει $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Άρα $4x - 4 \leq h(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Για $x = 2$ έχουμε $4 \leq h(2) \leq 4$ άρα $h(2) = 4$

Ενώ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 4) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$

Ισχύει λοιπόν $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2)$ άρα η h συνεχής στο $x = 2$

Για να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$ αρκεί να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2}$$

υπάρχει στο \mathbb{R}

$$4x - 4 \leq h(x) \leq x^2 \Leftrightarrow 4x - 8 \leq h(x) - 4 \leq x^2 - 4$$

Αν $x > 2$ τότε $\frac{4x - 8}{x - 2} \leq \frac{h(x) - 4}{x - 2} \leq \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-2)}{x-2} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = 4$ (1)

$$\text{Αν } x < 2 \text{ τότε } \frac{4x-8}{x-2} \geq \frac{h(x)-4}{x-2} \geq \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x-2)}{x-2} = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = 4$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $h'(2) = 4$

Δ3. Ισχύει για κάθε $x \geq 0$ ότι $4x-4 \leq h(x) \leq x^2$

$$\text{Άρα και } 4x-20 \leq h(x)-16 \leq x^2-16 \quad (\text{I})$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = h(x)-16$ η οποία είναι συνεχής στο $[4,5]$ και $\varphi(4) = h(4)-16$ ενώ $\varphi(5) = h(5)-16$

$$\text{Για } x=4 \text{ η (I) γίνεται } -4 \leq h(4)-16 \leq 0$$

$$\text{Για } x=5 \text{ η (I) γίνεται } 0 \leq h(5)-16 \leq 9$$

$$\text{Άρα } \varphi(4) \cdot \varphi(5) \leq 0$$

- Αν $\varphi(4) \cdot \varphi(5) = 0$ τότε $\varphi(4) = 0$ ή $\varphi(5) = 0$ επομένως το 4 ή το 5 είναι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) - 16 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 16$.
- Αν $\varphi(4) \cdot \varphi(5) < 0$ τότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) - 16 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 16$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(4,5)$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση $h(x) = 16$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[4,5]$

Δ4. Το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(x(t), x^2(t))$ μέχρι να φτάσει στο σημείο $(2,4)$ και ύστερα οι συντεταγμένες του είναι $M(x(t), 4x(t)-4)$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $x'(t) = 2 \text{ cm/sec} > 0$ άρα κίνηση προς τα δεξιά αφού το x αυξάνει.

Το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(x(t), 0)$

Εξετάζω σε ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση θα βρίσκεται το σημείο Μ τη χρονική t_0 στην οποία $E'(t_0) = 20\text{cm}^2/\text{sec}$

1^η περίπτωση

Τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του τριγώνου ΟΑΜ είναι $20\text{cm}^2/\text{sec}$ το σημείο Μ βρίσκεται στην C_f τότε : $0 \leq x(t) \leq 2$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ είναι $E(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot x^2(t) \Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} \cdot x^3(t)$

- Ο ρυθμός μεταβολής του είναι $E'(t) = \frac{3}{2}x^2(t) \cdot x'(t)$
- τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $E'(t_0) = 20\text{cm}^2/\text{sec}$ ενώ ισχύει $x'(t_0) = 2\text{cm}/\text{sec}$

άρα για $t = t_0$ έχουμε $E'(t_0) = \frac{3}{2}x^2(t_0) \cdot x'(t_0)$ αντικαθιστώντας έχουμε :

$$20 = \frac{3}{2}x^2(t_0) \cdot 2 \Leftrightarrow 20 = 3x^2(t_0) \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{20}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \sqrt{\frac{20}{3}} > 2 \text{ απορρίπτεται.}$$

2^η περίπτωση

Τη στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του τριγώνου ΟΑΜ είναι $20\text{cm}^2/\text{sec}$ το σημείο Μ βρίσκεται στην (ε) τότε : $x(t) \geq 2$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ είναι $E(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot (4x(t) - 4) \Leftrightarrow E(t) = 2x^2(t) - 2x(t)$

- ο ρυθμός μεταβολής του είναι $E'(t) = 4x(t) \cdot x'(t) - 2x'(t)$
- τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $E'(t_0) = 20\text{cm}^2/\text{sec}$ ενώ ισχύει $x'(t_0) = 2\text{cm}/\text{sec}$

άρα για $t = t_0$ έχουμε $E'(t_0) = 4x(t_0) \cdot x'(t_0) - 2x'(t_0)$ αντικαθιστώντας

$$20 = 4x(t_0) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 24 = 8 \cdot x(t_0) \Leftrightarrow x(t_0) = 3 \text{ δεκτή. Επομένως το σημείο είναι το } M_1(3,8)$$