

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 10 Ιανουαρίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \text{ δηλαδή } (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 5

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g θα λέμε ότι είναι ίσες ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m

(β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$

(γ) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

(δ) Κάθε συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της δεν είναι και συνεχής σε αυτό.

(ε) Για κάθε $\alpha > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = x^2 + 3$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x - 3$

B1. Να ορίσετε την συνάρτηση $f(x) = (h \circ g)(x)$

Μονάδες 4

Έστω $f(x) = (h \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 3$ με πεδίο ορισμού $A = [3, +\infty)$

B2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}

Μονάδες 6

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3} + 3, x \geq 3$

B4. (i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{f(x) - 3}{f^{-1}(x) - 3} \right] = 0$

Μονάδες 3

(ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{f(x) - 3}{f^{-1}(x) - 3} \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - 3} \right) \right]$

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f^2(x) - e^{2x} = 1 + 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $|\eta\mu(f(0) - 2)| = |f(0) - 2|$

Γ1. (i) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R}

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η g έχει μέγιστο το $\frac{1}{2}$ και ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 4

Γ4. (i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3 - x^3$ έχει μοναδική ρίζα x_0 .

Μονάδες 5

(ii) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + e^x - 2}{(x - x_0)^3}$, όπου x_0 η ρίζα του ερωτήματος Γ4 (i)

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \geq 0$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού 2 τετραγωνικών μονάδων.

Μονάδες 6

Αν είναι (ε): $y = 4x - 4$, θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = 4x - 4, x \geq 0$ και την συνάρτηση h για την οποία ισχύει $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στη θέση $x = 2$

Μονάδες 6

Δ3. Αν επιπλέον η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[4, 5]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 16$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[4, 5]$

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ3ΘΟ(ε)**

- Δ4. Ένα υλικό σημείο M ξεκινάει από το σημείο $O(0,0)$ και κινείται επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τέτοιο τρόπο, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του x να είναι $2\text{cm}/\text{sec}$. Μόλις φτάσει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη (ϵ) συνεχίζει να κινείται επί της ευθείας (ϵ) με τον ίδιο ρυθμό. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M , όταν ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMA είναι $20\text{cm}^2/\text{sec}$, όπου A η προβολή του σημείου M στον άξονα x'

Μονάδες 7