

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 23 Απριλίου 2025  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[α,β]$ .

Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α,β]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  ;

**Μονάδες 3**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$  τότε είναι και 1-1 στο  $\Delta$

(β) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

(γ) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  Ισχύει  $f^{-1}(f(y)) = y$ ,  
 $y \in A$

(δ) Αν οι συναρτήσεις  $f', g'$  είναι συνεχείς σε ένα διάστημα  $[α, β]$  τότε

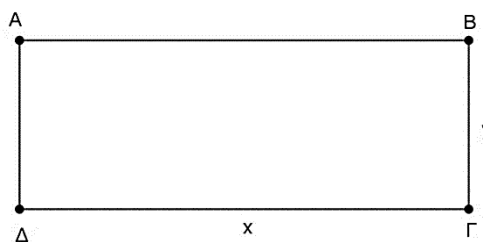
$$\text{ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

(ε) Αν  $0 \leq f(x) \leq 1$  κοντά στο 0, τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις  $x, y$  και σταθερή περίμετρο  $8m$ .



**B1.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι :

$$E(x) = -x^2 + 4x, x \in (0, 4)$$

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του γίνεται μέγιστο όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $E(x)$  οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $A(2, 5)$

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x) \cdot E(x) - 4E'(x)}$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + f(\alpha) & , x > 0 \\ x(e^x + 1) + \alpha & , x \leq 0 \end{cases} \quad \text{με } \alpha \leq 0 \text{ και } \beta \in \mathbb{R}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

Γ1. Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$  και  $\beta = 2$

Μονάδες 4

Γ2. (i) Να βρείτε το σημείο καμπής της  $f$ .

Μονάδες 5

(ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - f(-2) = (x + 2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h}$$

Μονάδες 3

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(f(x)) = 2025$

Μονάδες 3

Γ4. Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $f$  στο  $-\infty$  και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , την  $\varepsilon$  και την ευθεία  $x = -1$

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x$  με  $A = (0, +\infty)$

Δ1. Να δείξετε ότι η  $f$  έχει μόνο μία οριζόντια εφαπτομένη

στο σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$  με  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + \alpha \cdot e^x - x$ ,  $x \in A$  παρουσιάζει ακρότατο στο κρίσιμο σημείο της  $f$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3Θ0(ε)

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(2\alpha + f(x)) - g(1 + f(\alpha))}{g(x) - e^\alpha - 1}$

Μονάδες 5

Δ4. Έστω  $F$  αρχική της συνάρτησης  $h(x) = g(x^2) - f(x^2)$ ,  $x \in (0, +\infty)$

για την οποία ισχύει ότι  $e^x \geq \left( \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right)_{x+1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με

$\beta > \alpha > 0$  να δείξετε ότι

i.  $\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = 1$

Μονάδες 5

ii.  $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\alpha e^{x^2} - x^2) dx = (\beta - \alpha)F(\beta) - 1$

Μονάδες 5