

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ3ΘΟ(α)**

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Σελίδα 76 σχολικού βιβλίου (Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)

A2. Σελίδα 95 σχολικού βιβλίου (ΟΡΙΣΜΟΣ)

A3. Ο ισχυρισμός (γ) είναι λάθος

A4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_{h \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h\}$

$$A_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x \leq 1\}$$

$$A_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x \leq 0\}$$

$$\text{Άρα } A_{h \circ g} = (-\infty, 0] \text{ και } (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{1 - e^x}$$

B2. $f(x) = \sqrt{1 - e^x}, x \leq 0$

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Leftrightarrow 1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - e^{x_1}} > \sqrt{1 - e^{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A = (-\infty, 0]$ και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, 1)$

$$\Delta\iota\acute{o}\tau\iota \quad f(0) = \sqrt{1 - e^0} = \sqrt{1 - 1} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - e^x} = 1 \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 - 0 = 1$$

B3. Η f είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Άρα $A_{f^{-1}} = f(A) = [0, 1)$

Για την εύρεση της f^{-1} θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 - e^x} = y \Leftrightarrow 1 - e^x = y^2 \Leftrightarrow 1 - y^2 = e^x \Leftrightarrow x = \ln(1 - y^2)$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2), \quad x \in [0, 1)$$

B4. Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \right]$ έχουμε

$$\left| e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \right| = |e^x| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \right| \leq |e^x| \cdot 1$$

$$\text{Άρα } \left| e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \right| \leq |e^x|$$

$$\text{Επομένως } -|e^x| \leq e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \leq |e^x| \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 \quad \text{άρα} \quad \text{από} \quad \text{κριτήριο} \quad \text{παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - \cancel{f(x)} + \cancel{f(x)}}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right] \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

ενώ για το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$

Θέτουμε $u = -h$ άρα $h = -u$, όταν $h \rightarrow 0$ τότε $u \rightarrow 0$ οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{-u} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = -f'(x)$$

Άρα από την σχέση (I) έχουμε $\frac{1}{2} [f'(x) + f'(x)] = f'(x)$

Γ2. Έστω $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, a \neq 0$ η πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων ισχύει $f(0) = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$

Επομένως $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x$ και $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$

Ισχύει $f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα για $x = 0$ προκύπτει

$$f(0) + f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

Οπότε $f(x) = ax^3 + \beta x^2$ και $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + 3\alpha x^2 + 2\beta x = x^3 + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3 + (\beta + 3\alpha)x^2 + 2\beta x = x^3 + 3x^2$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 3 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 3 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 0 \text{ συνεπώς } f(x) = x^3 \text{ με } A_f = \mathbb{R}$$

Παρατήρηση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς το δεδομένο ότι η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ο λόγος που δόθηκε είναι για να είναι πιο απλό το σύστημα στην ισότητα των πολωνύμων

Ενναλλακτική λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) = x^3 + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3 + (\beta + 3\alpha)x^2 + (\gamma + 2\beta)x + \gamma + \delta = x^3 + 3x^2$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + 3\alpha = 3 \\ \gamma + 2\beta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \text{ άρα } f(x) = x^3 \text{ με } A_f = \mathbb{R}$$

Γ3. Α τρόπος

(i) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = 2x^3 + (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$h(0) = -1$ και $h(1) = 2$ δηλαδή $h(0) \cdot h(1) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$ τότε

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 < (x_2 - 1)^3 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $h(x_1) < h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα επομένως και 1-1 άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική .

Β τρόπος

Η εξίσωση μπορεί να λυθεί και αλγεβρικά και να προσδιοριστεί η ρίζα απευθείας η οποία όπως φαίνεται παρακάτω ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$

$$2x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2}x)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = 1-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x + x = 1 \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{2} + 1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

ii) Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}^*$

$$x^3 = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^4 = 1 - 2x \Leftrightarrow 3x^4 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

Από την τελευταία προκύπτει $x = -1$ και

$$3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0, \text{ η μοναδική ρίζα του ερωτήματος Γ3(i)}$$

Ενναλλακτικά

Σύμφωνα με τον Β τρόπο του ερωτήματος Γ3 (i) η εξίσωση έχει ρίζα την

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2$ ενώ η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$g'(x) = -\frac{1}{3x^2}$$

Έχουμε

$$f'(-1) = 3 \text{ και } g'(-1) = -\frac{1}{3} \text{ δηλαδή } f'(-1) \cdot g'(-1) = -1$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2 \text{ και } g'(x_0) = -\frac{1}{3x_0^2} \text{ δηλαδή } f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

Άρα οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων f και g στα κοινά τους σημεία τέμνονται κάθετα.

$$\begin{aligned} \Gamma 4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3+1}{x^{v-1}} \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} \right] = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3+1}{x^{v-1}} \cdot \frac{x^3}{x^3} \eta\mu \frac{1}{x^3} \right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3+1}{x^{v+2}} \cdot \left(x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} \right) \right] = 1 \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

$$\text{Για το } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} \text{ θέτουμε } u = \frac{1}{x^3} \text{ άρα } x^3 = \frac{1}{u}$$

$$\text{Έχουμε } u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+ \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\text{Για το } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^{v+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{v+2}} = \text{έχουμε τις εξής περιπτώσεις}$$

- Αν $3 > v+2 \Leftrightarrow v < 1$ Άτοπο αφού $v \in \mathbb{N}^*$
- Αν $3 = v+2 \Leftrightarrow v = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^{v+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ δεκτή διότι τότε ισχύει (I)
- Αν $3 < v+2 \Leftrightarrow v > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^{v+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{v-1}} = 0$ Άτοπο αφού τότε το όριο είναι 0.

ΘΕΜΑ 4

Δ1.

(i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $g'(x) = 6x^2 + 6x - 6f(0) \cdot f(1)$ και αφού δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη ισχύει $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $6x^2 + 6x - 6f(0) \cdot f(1) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για να ισχύει πρέπει $\Delta < 0$

$$\text{Δηλαδή: } 36 + 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow 6(1 + 4f(0) \cdot f(1)) < 0 \Leftrightarrow 1 + 4f(0) \cdot f(1) < 0$$

(ii) Για την f πρέπει $x^2 + x - f(0) \cdot f(1) \neq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $1 + 4f(0) \cdot f(1) < 0$ άρα $A_f = \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Ισχύει $1 + 4f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot f(1) < -\frac{1}{4}$ άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Δ2. Για να βρούμε το κοινό τους σημείο θα λύσουμε την εξίσωση

$$f_1(x) = f_2(x), x \in (0, +\infty)$$

Έχουμε $e^x = \frac{\alpha}{x}, x > 0$

Από το Δ1 ισχύει $f(x_0) = 0$ με $x_0 \in (0, 1)$

$$\text{Άρα } \frac{x_0 e^{x_0} - \alpha}{x_0^2 + x_0 - f(1)f(0)} = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = \alpha \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{\alpha}{x_0}$$

Άρα οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$ έχουν κοινό σημείο το $M(x_0, e^{x_0})$ ή $M\left(x_0, \frac{\alpha}{x_0}\right)$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό

Έστω $h(x) = e^x - \frac{\alpha}{x}, x > 0$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

- $x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{e^{x_1} < e^{x_2}} \quad (1)$
- $x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1 \cdot x_2 > 0} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \xRightarrow{\alpha > 0} \boxed{-\frac{\alpha}{x_1} < -\frac{\alpha}{x_2}} \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $h(x_1) < h(x_2)$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε και 1-1 άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Η κλίση της f_1 στο σημείο M είναι $f'_1(x_0) = e^{x_0}$

Ενώ η κλίση της f_2 στο σημείο M είναι $f'_2(x_0) = -\frac{\alpha}{x_0^2}$

Ισχύει $f'_1(x_0) = e^{x_0} > 0$ ενώ $f'_2(x_0) = -\frac{\alpha}{x_0^2} < 0$ άρα **δεν** έχουν κοινή εφαπτομένη στο M .

Δ3. Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(x)} - \alpha^{g(x)}}{e^{g(x)} + \alpha^{g(x)}}$. Θέτουμε $u = g(x)$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 6f(0) \cdot f(1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(x)} - \alpha^{g(x)}}{e^{g(x)} + \alpha^{g(x)}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - \alpha^u}{e^u + \alpha^u}$, γνωρίζουμε ότι $\alpha < e$ άρα

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - \alpha^u}{e^u + \alpha^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{e}\right)^u}{1 + \left(\frac{\alpha}{e}\right)^u} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad \text{αφού} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^u = 0, \quad 0 < \frac{\alpha}{e} < 1$$

Δ4. Ισχύει $g(0) = 0$ και $g(1) = 5 - 6f(0)f(1)$ το οποίο είναι θετικό διότι

$$f(0) \cdot f(1) < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -6f(0) \cdot f(1) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 5 - 6f(0) \cdot f(1) > \frac{13}{2}$$

Άρα $0 < 1$ και $g(0) < g(1)$ οπότε με δεδομένο ότι η g είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

$$g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{xe^x - \alpha}{x^2 + x - f(0) \cdot f(1)} > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - f(0) \cdot f(1)$ παίρνει μόνο θετικές τιμές διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός άρα ο αριθμητής πρέπει να είναι θετικός $xe^x - \alpha > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$

Προφανώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και με άλλους τρόπους.



ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)