



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$.

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$ και $f(α) \neq f(β)$

τότε να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε αριθμό k που βρίσκεται ανάμεσα στα $f(α), f(β)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = k$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

A3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

(α) Η g είναι συνεχής στο 2

(β) Η f είναι συνεχής στο 1

(γ) Η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

(δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Να σημειώσετε στο τετράδιό σας την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$, τότε η f παίρνει μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

(β) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη

(γ) Η $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x}$

(δ) Για κάθε 1-1 συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in A$

(ε) Κάθε συνάρτηση που είναι ένα προς ένα είναι και γνησίως μονότονη

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad h(x) = \sqrt{1-x}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g(x) = e^x$$

B1. Να ορίσετε την συνάρτηση $h \circ g$.

Μονάδες 5

$$\text{Αν } f(x) = (h \circ g) = \sqrt{1-e^x}, x \leq 0$$

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^x \cdot \text{συν}\left(\frac{1}{e^x}\right) \right]$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f πολωνομική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για την οποία ισχύει :

$$f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = x^3 + 3x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = x^3$, με $A_f = \mathbb{R}$

Μονάδες 5

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + (x-1)^3 = 0$ έχει μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 4

(ii) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και

$$g(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3} \text{ έχουν δυο κοινά σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες}$$

τέμνονται κάθετα.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το $v \in \mathbb{N}^*$ αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)+1}{x^{v-1}} \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right] = 1$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Α' ΦΑΣΗ

E_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6f(0) \cdot f(1)x$ η οποία δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη και η συνάρτηση $f(x) = \frac{xe^x - \alpha}{x^2 + x - f(0) \cdot f(1)}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < e$

Δ1. (i) Να δείξετε ότι $4f(0)f(1) + 1 < 0$

Μονάδες 3

(ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα $x_0 \in (0, 1)$

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = \frac{\alpha}{x}$, $x > 0$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο χωρίς κοινή εφαπτομένη σε αυτό.

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(x)} - \alpha^{g(x)}}{e^{g(x)} + \alpha^{g(x)}}$

Μονάδες 6

Δ4. Αν η g είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} να λύσετε την ανίσωση: $g(f(x)) > 0$

Μονάδες 5