**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Φλ3Θ(α)**

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ

Ημερομηνία: Σάββατο 4 Ιανουαρίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

- A1. β
A2. γ
A3. δ
A4. δ
A5. α. Σ
β. Σ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Λ

ΘΕΜΑ Β**B1.**

i. Σωστή επιλογή γ.

α τρόπος

Το κύμα φθάνει στο σημείο Σ την χρονική στιγμή $t_{\Sigma}=2T$. Άρα απέχει από την πηγή ($x=0$) απόσταση $x_{\Sigma} = u t_{\Sigma} = u2T=2\lambda$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ δίνεται από τη σχέση:

$$y_{\Sigma} = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right) = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - 2 \right) = A\eta\mu \left(2\pi \frac{t}{T} - 4\pi \right) \text{ (SI)}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ δίνεται από:

$$u_{\Sigma} = u_{\max} \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - 4\pi \right) \text{ (SI)}$$

Αντικαθιστώντας τον χρόνο $t=7T/2$ έχουμε:

$$u_{\Sigma} = u_{\max} \sin \left(2\pi \frac{7T}{2} - 4\pi \right) = \omega A \sin(7\pi - 4\pi) = \omega A \sin(3\pi) = -\omega A.$$

β τρόπος

Το κύμα φθάνει στο σημείο Σ την χρονική στιγμή $t_{\Sigma}=2T$. Οπότε τη χρονική στιγμή $t=7T/2$ το σημείο Σ ταλαντώνεται για χρονική διάρκεια

$$\Delta t = 7T/2 - 2T = 3T/2$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ δίνεται από τη σχέση: $u_{\Sigma} = u_{\max} \sin(\omega \Delta t)$. Οπότε:

$$u_{\Sigma} = u_{\max} \sin(\omega 3T/2) = u_{\max} \sin(3\pi) = -\omega A.$$

ii.

Σωστή επιλογή **α.**

Την χρονική στιγμή $t_{\Sigma}=2T$ που φθάνει το κύμα στο σημείο Σ η απομάκρυνση του είναι $y_{\Sigma 1} = 0$. Την χρονική στιγμή $t=7T/2$ το σημείο Σ έχει κατά μέτρο μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης οπότε βρίσκεται στην θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του, δηλαδή $y_{\Sigma 2} = 0$.

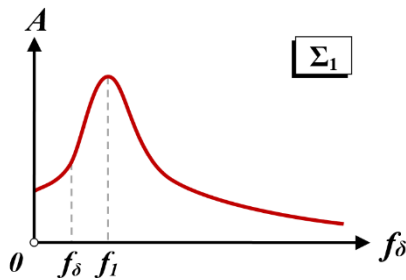
Η μετατόπιση του στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι: $\Delta y_{\Sigma} = y_{\Sigma 2} - y_{\Sigma 1} = 0$.

B2.

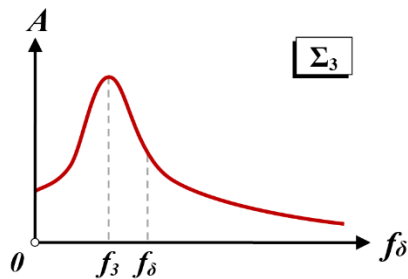
Σωστή επιλογή **β.**

Καθώς μεταβάλλεται η f_{δ} , παρατηρούμε ότι το πλάτος ταλάντωσης A_2 του συστήματος Σ_2 μειώνεται και στις 2 περιπτώσεις. Άρα η συχνότητα f_{δ} είναι η συχνότητα συντονισμού για το Σ_2 , επομένως είναι ίση με την ιδιοσυχνότητά του,

$$f_{\delta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{m}}.$$



Από την περίπτωση (i) μειώνοντας την f_δ το πλάτος A_1 του συστήματος Σ_1 συνεχώς μειώνεται. Με την βοήθεια της καμπύλης συντονισμού για το σύστημα Σ_1 συμπεραίνουμε ότι $f_\delta < f_1$, όπου f_1 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος Σ_1 . Στο ίδιο συμπέρασμα θα οδηγηθούμε και με τα δεδομένα για το σύστημα Σ_1 της περίπτωσης (ii).



Από την περίπτωση (i) μειώνοντας την f_δ το πλάτος A_3 του συστήματος Σ_3 συνεχώς αυξάνεται. Με την βοήθεια της καμπύλης συντονισμού για το σύστημα Σ_3 συμπεραίνουμε ότι $f_\delta > f_3$, όπου f_3 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος Σ_3 . Στο ίδιο συμπέρασμα θα οδηγηθούμε και με τα δεδομένα για το Σ_3 της περίπτωσης (ii).

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } f_3 < f_\delta < f_1 &\Rightarrow f_3 < f_2 < f_1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_3}{m}} < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{m}} < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{m}} \\ &\Rightarrow k_3 < k_2 < k_1. \end{aligned}$$

B3.

i. Σωστή επιλογή **α**.

Η ορμή της σφαίρας Σ_1 πριν την κρούση έχει μέτρο p .

Η ορμή του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 στον οριζόντιο άξονα $x'x$ διατηρείται σταθερή.

$$\vec{p}_{\text{αρχ}(x)} = \vec{p}_{\text{τελ}(x)} \Rightarrow m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow v_{1x} = 2 v_k.$$

Το σώμα Σ_2 μεταβάλλει την ορμή του μόνο στον οριζόντιο άξονα $x'x$.

$$\Delta \vec{p}_{\Sigma 2x} = \Delta \vec{p}_{\Sigma 2}$$

$$\text{οπότε } \Delta p_{\Sigma 2x} = p/4 = m_1 v_1/4.$$

Ακόμα ισχύει ότι:

$$\Delta p_{\Sigma 2x} = m_2 v_k - 0 = m_2 v_k$$

$$\text{Οπότε } m_1 v_1/4 = m_2 v_k$$

$$\xrightarrow{(m_1=m_2)} v_1/4 = v_k.$$

$$\text{Έχουμε ότι: } v_{1x} = 2 v_k = 2 v_1/4 \Rightarrow v_{1x} = v_1/2.$$

$$\text{Ισχύει ότι: } v_{1x} = v_1 \cos \theta. \quad \text{Οπότε } \frac{v_1}{2} = v_{1x} = v_1 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 1/2.$$

ii. Σωστή επιλογή γ.

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 ελάχιστη πριν την κρούση είναι

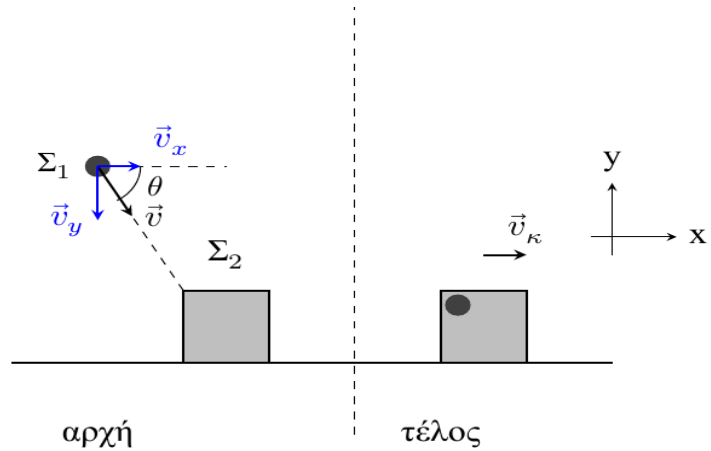
$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 ελάχιστη μετά την κρούση είναι

$$K_1' = \frac{1}{2} m_1 v_k^2$$

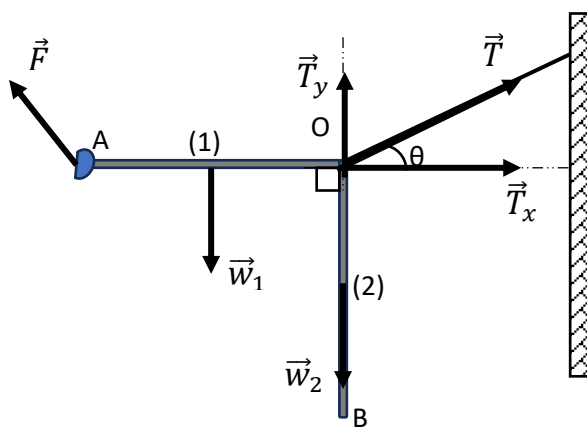
$$\text{Ισχύει ότι } v_k = \frac{v_{1x}}{2} = \frac{v_1}{4}$$

$$\text{Οπότε } K_1 / K_1' = 16.$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο σύστημα των 2 ράβδων ΟΑ και ΟΒ του σχήματος ασκούνται:



Α) τα βάρη τους $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ αντίστοιχα,

Β) η δύναμη $\vec{T}$ του τεντωμένου νήματος στο Ο, και

Γ) η δύναμη $\vec{F}$ της άρθρωσης στο σημείο Α.

Καθώς το σύστημα των 2 ράβδων ισορροπεί η συνισταμένη ροπή σε αυτό

είναι ίση με μηδέν.

Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των ροπών στο σύστημα των δύο ράβδων ως προς το σημείο Α, το σημείο εφαρμογής της δύναμης άρθρωσης $\vec{F}$.

$$\tau_F = \tau_{Tx} = 0.$$

$$\tau_{w1} = w_1 \cdot \frac{L}{2} = 4 \text{ Nm}, \text{ (με φορά κάθετη στο επίπεδο των ράβδων από τον αναγνώστη προς τη σελίδα),}$$

$$\tau_{w2} = w_2 \cdot L = 8 \text{ Nm}, \text{ (με φορά κάθετη στο επίπεδο των ράβδων από τον αναγνώστη προς τη σελίδα),}$$

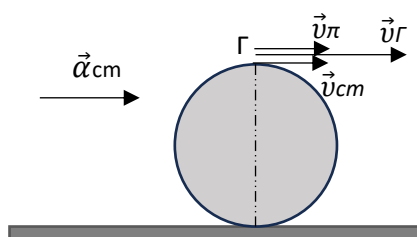
$$\tau_{Ty} = T_y \cdot L = T \sin \theta \cdot L \text{ (με φορά κάθετη στο επίπεδο των ράβδων από την σελίδα προς τον αναγνώστη).}$$

Επομένως (θετική η φορά περιστροφής αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού):

$$\tau_{Ty} - \tau_{w1} - \tau_{w2} = 0 \Rightarrow T \sin \theta \cdot L = 12 \text{ Nm} \Rightarrow T = 60 \text{ N}.$$

Γ2.

i. Η γωνία που στρέφεται ο κύλινδρος σε $t_1 = 1 \text{ s}$ είναι ίση με $\theta = 2\pi \text{ rad}$.



Επομένως το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2 \Rightarrow \alpha_\gamma = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Καθώς ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η μεταφορική του επιτάχυνση

έχει μέτρο ίσο με: $a_{cm} = \alpha_\gamma R = 0.8\pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Την χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ η μεταφορική του ταχύτητα έχει μέτρο ίσο με: $v_{cm} = a_{cm} t = 0,8\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Λόγω της κύλισης χωρίς

ολίσθηση η ταχύτητα λόγω περιστροφής του σημείου Γ που βρίσκεται στην περιφέρεια του κυλίνδρου έχει μέτρο $v_{\pi} = \omega R = v_{cm} = 0,8\pi \frac{m}{s}$.

Επομένως για της ταχύτητα του σημείου Γ τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$ έχουμε:
 $\vec{v}_G = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi} \Rightarrow v_G = v_{cm} + v_{\pi} \Rightarrow v_G = 1,6\pi \frac{m}{s}$.

ii. Η ταχύτητα του σημείο Γ μηδενίζεται όταν αυτό έρχεται σε επαφή με το έδαφος. Αυτό θα συμβεί για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή t_1 όταν ο κύλινδρος έχει εκτελέσει μισή περιστροφή και έχει περιστραφεί κατά τόξο μήκους $ds = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$. Καθώς ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, στο παραπάνω χρονικό διάστημα έχει μετακινηθεί οριζόντια δεξιά κατά

$$dx = ds = \pi R \Rightarrow dx = 0,2\pi m.$$

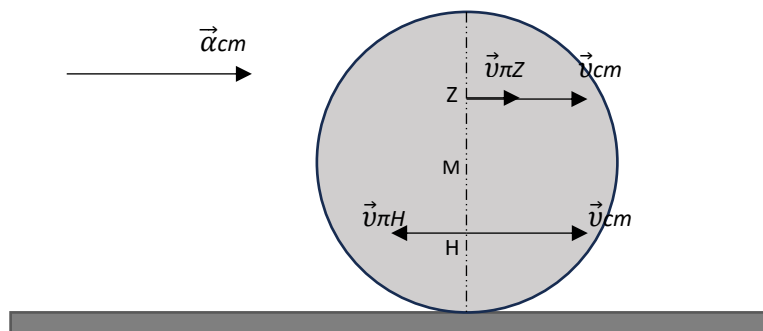
Γ3. Για το σημείο Z η ταχύτητα λόγω περιστροφής έχει μέτρο

$$v_{\pi Z} = \omega \cdot (MZ) = \omega \cdot \frac{R}{3}. \text{ Η ταχύτητά του είναι:}$$

$$\vec{v}_Z = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi Z} \Rightarrow v_Z = v_{cm} + \frac{\omega R}{3} \text{ (θετική η φορά της } \vec{v}_{cm} \text{)}.$$

Παρομοίως για το σημείο H: $v_{\pi H} = \omega \cdot (MH)$ και

$$\vec{v}_H = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\pi H} \Rightarrow v_H = v_{cm} - \omega(MH) \text{ (θετική η φορά της } \vec{v}_{cm} \text{)}.$$



Καθώς ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει ότι: $v_{cm} = \omega R$.

$$\frac{v_Z}{v_H} = 4 \Rightarrow \frac{\omega R + \frac{\omega R}{3}}{\omega R - \omega(MH)} = 4 \Rightarrow (MH) = \frac{2R}{3}.$$

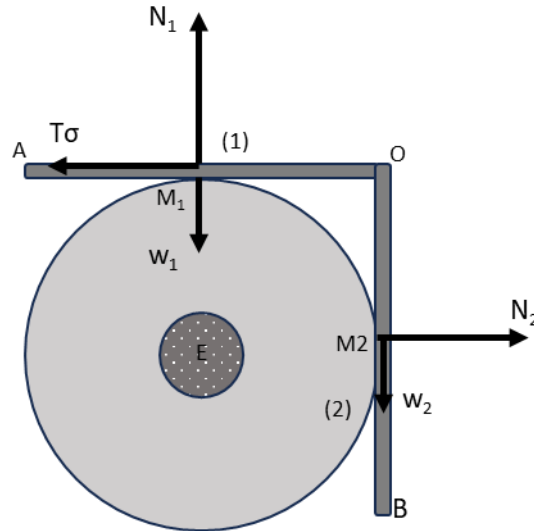
$$\text{Επομένως: } (ZH) = (MZ) + (MH) \Rightarrow (ZH) = R.$$

Γ4. Στις ράβδους (OA) και (OB) ασκούνται, τα βάρη τους $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$, οι κάθετες στις ράβδους δυνάμεις $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$ από την επιφάνεια του κυλίνδρου καθώς και η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$ ανάμεσα στον κύλινδρο και τη ράβδο (OA).

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον οριζόντιο άξονα $x'x$:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 = T_\sigma \quad (1).$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα $y'y$:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = w_1 + w_2 \Rightarrow N_1 = 40 \text{ N}.$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των ροπών στο σύστημα των δύο ράβδων ως προς το μέσο M_1 της ράβδου (1).

$$\tau_{N1} = \tau_{w1} = \tau_{T\sigma} = 0.$$

$$\tau_{N2} = N_2 R, \text{ με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.}$$

$$\tau_{w2} = w_2 R, \text{ με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.}$$

Καθώς το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί, από την ισορροπία των ροπών σε αυτήν ως προς το M_1 (θετική η φορά περιστροφής αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού):

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_{N2} - \tau_{w2} = 0 \Rightarrow N_2 R - w_2 R = 0 \Rightarrow N_2 = w_2 = 20 \text{ N}.$$

$$\text{Από την σχέση (1): } T_\sigma = 20 \text{ N}.$$

Για να ισορροπεί το σύστημα των δύο ράβδων στον κύλινδρο απαιτείται:

$$T_\sigma \leq \mu_\sigma N_1, \text{ όπου } \mu_\sigma \text{ ο συντελεστής στατικής οριακής τριβής.}$$

$$\text{Επομένως: } \mu_\sigma \geq \frac{T_\sigma}{N_1} \Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\vec{v}_1'$ και $\vec{v}_2'$ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, αμέσως μετά την κεντρική ελαστική τους κρούση ισχύει ότι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 - 4}{2 + 4} 12 \Rightarrow \mathbf{v_1' = -4 \text{ m/s.}}$$

$$v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{4}{2 + 4} 12 \Rightarrow \mathbf{v_2' = 8 \text{ m/s.}}$$

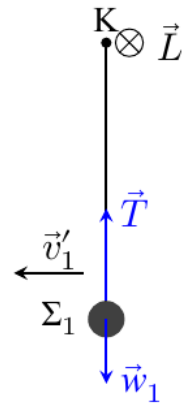
Δ2. Για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση ισχύει ότι:

$$\vec{T} + \vec{W}_1 = \vec{F}_\kappa \Rightarrow T - m_1 g = m_1 v_1'^2 / \ell \Rightarrow \mathbf{T = 60 \text{ N.}}$$

Το μέτρο της στροφορμής του σώματος Σ_1 ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο K και είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης του, αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\mathbf{L = m_1 |\vec{v}_1'| \ell = 6,4 \text{ kgm}^2/\text{s.}}$$

Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.



Δ3. Εφαρμόζουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) κατά την μετακίνηση του σώματος Σ_1 από την θέση που βρίσκεται αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 μέχρι την θέση που σταματά στιγμιαία, δηλαδή την χρονική στιγμή που η γωνία εκτροπής του νήματος είναι μέγιστη.

$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = -m_1 g h \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g h \Rightarrow \mathbf{h = 0,8 \text{ m} = \ell}$$

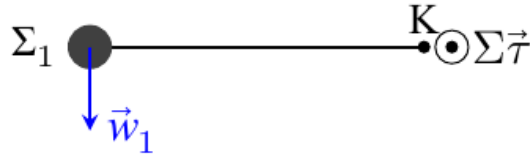
Η τάση του νήματος στην παραπάνω μετακίνηση δεν εκτελεί έργο, αφού έχει διεύθυνση συνεχώς κάθετη στην διεύθυνση κίνησης του σώματος.

Το νήμα τότε είναι οριζόντιο, οπότε η μέγιστη γωνία εκτροπής του νήματος είναι $\mathbf{\theta_{max} = 90^\circ}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_1 , ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο K και είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης του σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή που το νήμα είναι οριζόντιο έχει μέτρο

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = |\vec{\Sigma\tau}| = m_1 g \ell = 16 \text{ Nm}.$$

Η κατεύθυνση του είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη.



Δ4. Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση και για όσο χρονικό διάστημα κινείται στο λείο οριζόντιο δάπεδο ΟΓ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Η θέση ισορροπίας του βρίσκεται στο σημείο Ο.

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσής του έχει τιμή $\omega = \sqrt{k/m_2} = 5 \text{ r/s}$.

Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της απλής αρμονικής ταλάντωσης που πραγματοποιεί μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ.

Για την μέγιστη ταχύτητά του ισχύει $v_2' = v_{\max} = \omega A \Rightarrow 8 = 5 A \Rightarrow A = 1,6 \text{ m}$.

Η χρονική συνάρτηση της θέσης στην απλή αρμονική ταλάντωση που πραγματοποιεί είναι:

$$x = A \sin(\omega t) \Rightarrow x = 1,6 \sin(5t), \text{ S.I}$$

Την χρονική στιγμή $t = \pi/30 \text{ s}$ το σώμα βρίσκεται στη θέση Γ και ισχύει ότι

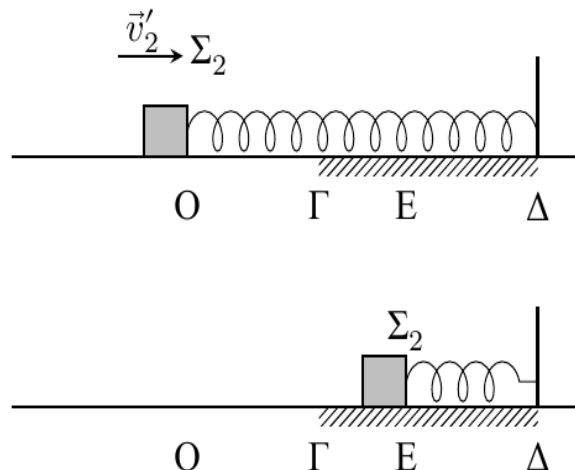
$$x = 1,6 \sin(5t) = 1,6 \sin(5 \pi/30) = 0,8 \text{ m}.$$

Το τμήμα ΟΓ του δαπέδου έχει μήκος (ΟΓ) = 0,8m. Οπότε στο τραχύ δάπεδο το σώμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία, διανύει διάστημα

$$s = d - (OA) \Rightarrow s = 1,5 - 0,8 \Rightarrow s = 0,7 \text{ m}.$$

Κατά την μετακίνηση του σώματος Σ_2 στο τραχύ δάπεδο, το μέτρο της δύναμης τριβής που του ασκείται είναι $T = \mu m_2 g$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) κατά την μετακίνηση του σώματος Σ_2 από την θέση που βρίσκεται αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_2 (σημείο Ο), μέχρι την θέση που σταματά στιγμιαία (σημείο Ε).



$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{Fελ} + W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\frac{1}{2} k d^2 - \mu m_2 g s$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 48 = -\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2,25 - 28 \mu \Rightarrow \mu = \frac{31}{56}$$

Δ5. Το σώμα Σ_2 αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική, ταλάντωση σε κάθε περίπτωση που το πλάτος δεν υπερβαίνει την τιμή $(OA)=0,8m$.

Οπότε $A_{max}=(OA)=0,8m$.

Τότε ισχύει ότι $v_2''=v''_{max}=\omega A_{max} \Rightarrow v_2''=5 \cdot 0,8 = 4 \text{ m/s}$.

Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της ταχύτητας v_{1max} του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2 έχει τιμή

$$v_2'' = \frac{2 m_1}{m_1+m_2} v_{1max} \Rightarrow 4 = \frac{4}{2+4} v_{1max} \Rightarrow v_{1max} = 6 \text{ m/s}.$$