

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σελίδα 145 σχολικού βιβλίου.
A2. Σελίδα 185 σχολικού βιβλίου.
A3. Σωστή απάντηση η (δ)
A4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1. Η σύνθεση της g με την h είναι η $h \circ g$, επομένως

$$A_{h \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 0\}$$

$$\text{Άρα } A_{h \circ g} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ και } (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}, x \neq 0$$

- B2.(i) Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$ με

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0)$ και $A_2 = (0, +\infty)$

Η f συνεχής στο $A_1 = (-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Οπότε: } f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

Διότι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0$ και για $x < 0$ ισχύει $e^x - 1 < 0$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

Η f συνεχής στο $A_2 = (0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Οπότε: } f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

Διότι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0$ και για $x > 0$ ισχύει $e^x - 1 > 0$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Άρα } f(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

(ii) Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, \alpha]$ άρα υπάρχει $\xi \in (1, \alpha)$ ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(1)}{\alpha - 1} \Leftrightarrow -\frac{e^\xi}{(e^\xi - 1)^2} = \frac{f(\alpha) - f(1)}{\alpha - 1} \Leftrightarrow (f(\alpha) - f(1))(e^\xi - 1)^2 = (1 - \alpha)e^\xi$$

B3. Για να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφεται θα αποδείξουμε ότι είναι 1-1

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_2} - 1} \Leftrightarrow e^{x_1}(e^{x_2} - 1) = e^{x_2}(e^{x_1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1}e^{x_2} - e^{x_1} = e^{x_2}e^{x_1} - e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} = -e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Επομένως η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Άρα η εξίσωση $f(x) = y$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $y \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x = ye^x - y \Leftrightarrow ye^x - e^x = y \Leftrightarrow e^x(y - 1) = y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{y - 1}\right)$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{x - 1}\right), x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

B4. Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right]$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$\text{Άρα } \left| f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right| = |f(x)| \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right| \leq |f(x)| \cdot 1$$

$$\text{Άρα } \left| f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \leq |f(x)|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} -|f(x)| = 0$ από κριτήριο

$$\text{παρεμβολής έχουμε ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{f(x)}\right) \right] = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x) - 2x \ln x - x^2 + 4x + 3$ άρα είναι πραγματικός αριθμός, οπότε θεωρούμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k \in \mathbb{R}$ **(1)**

Επομένως $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x - 3 + 2k$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \ln x + x^2 - 4x - 3 + 2k) = -3 + 2k$

Λόγω της **(1)** έχουμε $-3 + 2k = k \Leftrightarrow k = 3$

Για $k = 3$ έχουμε $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$

Γ2.

Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \ln x + 2x - 2$ και

$$f''(x) = \frac{2}{x} + 2 > 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή στο } (0, +\infty)$$

Αφού η f είναι κυρτή η f' θα είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1) = 0$ επομένως η $x = 1$ είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$

Το πρόσημο της f' θα βρεθεί από την μονοτονία της.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1 \text{ ενώ } f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Στη θέση $x = 1$ έχει (ολικό) ελάχιστο το $f(1) = 0$

Εξήγηση $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$f(1) = 0$$

Άρα $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει **μόνο** για $x = 1$

Γ3.(i) Για να βρούμε το κοινό σημείο των g, h θα λύσουμε την εξίσωση

$$g(x) = h(x) \text{ με } x \in A_g \cap A_h = (0, +\infty)$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει **μοναδική** λύση την $x = 1$ διότι η f στη θέση $x = 1$ έχει (ολικό) ελάχιστο το 0

Άρα το κοινό σημείο των συναρτήσεων g και h είναι το σημείο $M(1, 0)$

$$\text{δηλαδή } g(1) = h(1)$$

Επίσης $g'(x) = \ln x + 1$ οπότε $g'(1) = 1$ και $h'(x) = -x + 2$ οπότε $h'(1) = 1$

Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο .

(ii) Επειδή οι συναρτήσεις g και h έχουν ένα κοινό σημείο το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^2 |g(x) - h(x)| dx = \int_1^2 \left| x \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right| dx = \frac{1}{2} \int_1^2 |2x \ln x + x^2 - 4x + 3| dx = \frac{1}{2} \int_1^2 |f(x)| dx$$

Όμως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ άρα

$$E = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x \ln x + x^2 - 4x + 3) dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (2x \ln x) dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right) = 2 \ln 2 - \frac{13}{12}$$

$$\bullet \quad I_1 = \int_1^2 2x \ln x = \int_1^2 (x^2)' \ln x = [x^2 \ln x]_1^2 - \int_1^2 x^2 \frac{1}{x} dx = [x^2 \ln x]_1^2 - \int_1^2 x dx =$$

$$= \left[x^2 \ln x \right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$\bullet \quad I_2 = \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - 8 + 6 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) = -\frac{2}{3}$$

Γ4.

$$\ln(\alpha^{2\alpha} \cdot \beta^{2\beta}) + (\alpha - 2)^2 + (\beta - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow \ln \alpha^{2\alpha} + \ln \beta^{2\beta} = -(\alpha - 2)^2 - (\beta - 2)^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha \ln \alpha + 2\beta \ln \beta = -\alpha^2 + 4\alpha - 4 - \beta^2 + 4\beta - 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha \ln \alpha + 2\beta \ln \beta + \alpha^2 - 4\alpha + 3 + \beta^2 - 4\beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) + f(\beta) = 0}$$

Η τελευταία ισχύει μόνο όταν $\alpha = \beta = 1$

Διότι $f(\alpha) + f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = -f(\beta)$, δηλαδή οι αριθμοί είναι είτε και οι δύο μηδέν είτε αντίθετοι, το τελευταίο δεν ισχύει αφού

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$

$$\bullet \quad f(\alpha) \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha > 0 \text{ και } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\bullet \quad f(\beta) \geq 0 \text{ για κάθε } \beta > 0 \text{ και } f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα $f(\alpha) + f(\beta) \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - (x - 4)) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x \ln x + x^2 - 4x + 3 - 2x \ln x}{x} - x + 4 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x - 3}{x} - x + 4 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x - 3 - x^2 + 4x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{x} \right) = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) - (k+2)x - e^k = e^{x+k} + x^2 + x - (k+2)x - e^k$$

Για την οποία ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $h(x) \geq h(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $h(0) = 0$

Άρα η h στο $x = 0$ έχει ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό άρα από
Θεώρημα Fermat

Ισχύει $h'(0) = 0$

Παραγωγίζοντας την h έχουμε $h'(x) = e^{x+k} + 2x + 1 - (k+2)$

$h'(0) = 0 \Leftrightarrow e^k + 1 - (k+2) = 0 \Leftrightarrow e^k - k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0$ διότι : $e^x \geq x + 1$ για
κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Δ2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad (1)$$

Ισχύει : $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$ άρα $f'(0) = 1$

Αντικαθιστώντας τα $f(0)$ και $f'(0)$ στην (1) έχουμε : $y - 1 = x \Leftrightarrow \boxed{y = x + 1}$

Η g έχει επίσης πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Για να εφάπτεται η $y = x + 1$ στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g

αρκεί το σύστημα : $\begin{cases} g'(x_0) = 1 \\ g(x_0) = x_0 + 1 \end{cases}$ να έχει λύση .

Πράγματι : $\begin{cases} -2x_0 - 1 = 1 \\ -x_0^2 - x_0 = x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -1$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο της $B(-1, g(-1))$ δηλαδή στο σημείο $B(-1, 0)$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = \left(\int_a^x \frac{f(x)}{g(x)} dx \right) x^3 - (e^x - e)(g(\alpha) - f(\beta))$

Η φ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$

- $\varphi(0) = -(1 - e)(g(\alpha) - f(\beta)) = (e - 1)(g(\alpha) - f(\beta)) < 0$

Διότι $f(\beta) > f(\alpha) > g(\alpha)$ άρα $g(\alpha) - f(\beta) < 0$ λόγω κυρτότητας.

- $\varphi(1) = \left(\int_a^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx \right) > 0$

Διότι Η συνάρτηση $g(x) = -x^2 - x$ παίρνει θετικές τιμές στο διάστημα $[a, \beta]$,
το ίδιο και η συνάρτηση $f(x) = e^x$ άρα $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική με

$$\varphi'(x) = 3x^2 \left(\int_a^x \frac{f(x)}{g(x)} dx \right) - e^x (g(\alpha) - f(\beta))$$

και $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ άρα στο διάστημα αυτό είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Δ4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(x)) \cdot \eta \mu x}{x f(x) - x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(x)) \cdot \eta \mu x}{x(f(x) - x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\eta \mu x}{x} \right) \cdot \frac{1}{f(x) - x - 1} \cdot g(f(x)) \right] = -\infty$$

$$\text{Διότι : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1, \quad f(x) = e^x \quad \text{άρα } g(f(x)) = -e^{2x} - e^x < 0$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής

Οπότε για τιμές του x πολύ κοντά στο 0 ισχύει $f(x) > x + 1 \Leftrightarrow f(x) - x - 1 > 0$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x - 1) = 0 \quad \text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - x - 1} = +\infty$$