

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 106
- A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 74
- A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 23
- A4.** (α) Λάθος (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_{h \circ g} = \left\{ x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_h \right\} = \left\{ -1 < x < 1 \text{ και } \frac{1-x}{1+x} > 0 \right\}$

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\text{Άρα } A_{h \circ g} = (-1, 1) \neq \emptyset \text{ επομένως } (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \ln \frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$$

B2.

(α) Για να δείξουμε ότι η $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$ αντιστρέφεται θα αποδείξουμε ότι είναι 1-1.

Έστω $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$\ln \frac{1-x_1}{1+x_1} = \ln \frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow (1-x_1)(1+x_2) = (1+x_1)(1-x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+x_2-x_1-x_1 \cdot x_2 = 1-x_2+x_1-x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

(β) Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$, $-1 < x < 1$ ως προς x για να βρούμε την αντίστροφη της f .

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow 1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow 1-e^y = x + xe^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-e^y = x(1+e^y) \Leftrightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}, y \in \mathbb{R}$$

αφού $-1 < \frac{1-e^y}{1+e^y} < 1 \Leftrightarrow -1-e^y < 1-e^y < 1+e^y$ το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$$

B3. Η εξίσωση εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο : $y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0)$

$$\text{Όπου } f^{-1}(0) = 0 \text{ ενώ } (f^{-1})'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} \text{ και } (f^{-1})'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

B4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha & , \quad x > 0 \\ x^3 + \beta x + \beta & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής επομένως : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ άρα $\boxed{1 + \alpha = \beta}$

Από την παραγωγισιμότητα της f προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \beta x + \beta - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 + \beta)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \beta) = \beta$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \alpha - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \beta - 1 - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Διότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης e^x στο σημείο $x = 0$

Άρα $\beta = 1$ και από την σχέση $\boxed{1 + \alpha = \beta}$ παίρνουμε ότι $\alpha = 0$

Γ2. Αφού το σημείο $M(x, y), x < 0$ κινείται πάνω στην C_f ισχύει

$$y(t) = x^3(t) + x(t) + 1$$

Άρα $y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)$ για $t = t_0$ ισχύει $x(t_0) = -1$ και $y(t_0) = -1$

Επομένως : $y'(t_0) = 3 \cdot x'(t_0) + x'(t_0) \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = 4 \cdot x'(t_0)}$

Γ3. (i) Η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η $e^x = \frac{1}{x}$, αφού θέλουμε να έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\rho \in (0, +\infty)$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1} - \frac{1}{x_1} < e^{x_2} - \frac{1}{x_2} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της g άρα υπάρχει $\rho \in (0, +\infty)$ ώστε

$$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) - \frac{1}{\rho} = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \boxed{e^\rho = \frac{1}{\rho}}, \text{ το } \rho \text{ μοναδικό αφού η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.}$$

(ii) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f με $x_0 > 0$, επομένως κινείται στο κλάδο $f(x) = e^x, x > 0$

Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο A είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M(-1, 1)$ **όταν**

$$-1 - f(x_0) = f'(x_0)(-1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-1 - e^{x_0} = e^{x_0}(-1 - x_0) \Leftrightarrow -1 - e^{x_0} = -e^{x_0} - e^{x_0}x_0 \Leftrightarrow -1 = -e^{x_0}x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = e^{x_0}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει **μόνο** για το $x_0 = \rho, \rho > 0$, άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη.

Γ4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)}{f(-x) - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^3+x+1} \cdot \eta\mu(x^3+x+1)}{e^{-x} - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-x} - 2} \cdot e^{x^3+x+1} \cdot \eta\mu(x^3+x+1) \right)$$

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x} - 2} = 0$ διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ (αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $e^x > 0$)

Θέτουμε $u = x^3 + x + 1$ άρα $u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{x^3+x+1}}{e^{-x} - 2} \cdot \eta\mu(x^3+x+1) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) \cdot \eta\mu(x^3+x+1))$

Όπου $h(x) = \frac{e^{x^3+x+1}}{e^{-x} - 2}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$$|h(x) \cdot \eta\mu(x^3+x+1)| \leq |h(x)| \cdot |\eta\mu(x^3+x+1)| \leq |h(x)|$$

Άρα $-|h(x)| \leq h(x) \cdot \eta\mu(x^3+x+1) \leq |h(x)|$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ από κριτήριο

παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)}{f(-x) + 2} = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in [0, 4]$ έχουμε

$$f^2(x) + 2f(x)\sqrt{4-x} = 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)\sqrt{4-x} + (\sqrt{4-x})^2 = 2(x-2) + (\sqrt{4-x})^2$$

$$\Leftrightarrow (f(x) + \sqrt{4-x})^2 = 2x - 4 + 4 - x \Leftrightarrow (f(x) + \sqrt{4-x})^2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) + \sqrt{4-x}| = \sqrt{x} \quad (1)$$

Θέτουμε $\varphi(x) = f(x) + \sqrt{4-x}$, με $x \in [0, 4]$

Βρίσκουμε τις ρίζες της $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow |\varphi(x)| = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα η συνάρτηση $\varphi(x)$ μηδενίζεται στο $x = 0$ και επειδή είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο $(0, 4]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, 3]$ άρα $f(1) \cdot f(3) < 0$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα $f(1) < f(3)$ επομένως $f(1) < 0$ ενώ $f(3) > 0$

Επομένως $\varphi(3) = f(3) + \sqrt{4-3} = f(3) + 1 > 0$ και λόγω διατήρησης προσήμου $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Άρα από την σχέση (1) προκύπτει $f(x) + \sqrt{4-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$, $A = [0, 4]$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = [0, 4]$ άρα $f(A) = [f(0), f(4)] = [-2, 2]$

Δ2. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - e^{-x}, x \in [0, 4]$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $A = [0, 4]$ και θα βρούμε το πρόσημό της.

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

$$\overset{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{x_1 < x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει $h(x_1) < h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Η h συνεχής στο $[0, 4]$ και $h(0) \cdot h(4) < 0$ αφού $h(0) = -3 < 0$ και

$$h(4) = 2 - e^{-4} > 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

Το x_0 μοναδικό αφού η h γνησίως αύξουσα.

Για την σχετική τους θέση έχουμε :

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$$

Άρα για κάθε $x \in (x_0, 4]$ η C_f πάνω από την C_g

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$$

Άρα για κάθε $x \in [0, x_0)$ η C_f κάτω από την C_g

Δ3. $f(e^{-x}) \left[\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{4-f(x)} \right) \right] < 2f(x) - 4$, ισχύει $\sqrt{f(x)} + \sqrt{4-f(x)} > 0$ άρα

$$f(e^{-x}) < \frac{2f(x) - 4}{\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{4-f(x)} \right)}$$

και επειδή για κάθε $x \in (2, 4)$ $\sqrt{f(x)} - \sqrt{4-f(x)} \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(e^{-x}) &< \frac{(2f(x) - 4)(\sqrt{f(x)} - \sqrt{4-f(x)})}{\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{4-f(x)} \right)(\sqrt{f(x)} - \sqrt{4-f(x)})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(e^{-x}) < \frac{(2f(x) - 4)(\sqrt{f(x)} - \sqrt{4-f(x)})}{2f(x) - 4} \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$f(e^{-x}) < \sqrt{f(x)} - \sqrt{4-f(x)} \Leftrightarrow f(e^{-x}) < f(f(x)) \Leftrightarrow e^{-x} < f(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x) \Leftrightarrow x > x_0$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (x_0, 4)$ με $x_0 > 2$ αφού $h(2) < 0$, $h(x_0) = 0$.

και η $h(x)$ γνησίως αύξουσα.

Δ4. Ο παρονομαστής του κλάσματος τείνει στο μηδέν αφού

$$f(x_0) = e^{-x_0} \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{1}{e^{x_0}} \Leftrightarrow f(x_0)e^{x_0} = 1$$

και επειδή $x > x_0$ ισχύει από το **Δ2**. $f(x) > e^{-x} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow f(x)e^x - 1 > 0$

Το πρόσημο του ορίου του αριθμητή είναι: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f^{-1}(x-1) = f^{-1}(x_0-1) > 0$ διότι

$$f^{-1}(x_0-1) > 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_0-1)) > f(0) \Leftrightarrow x_0-1 > -2 \Leftrightarrow x_0 > -1 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{-1}(x-1)}{e^x f(x) - 1} = +\infty$$