

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ3ΘΟ(α)**

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Απόδειξη σελίδα 99 σχολικού βιβλίου
A2. Ορισμός σελίδα 33 σχολικού βιβλίου
A3. Θεώρημα σελίδα 76 σχολικού βιβλίου
A4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} + 1 < \sqrt{x_2} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται

Επομένως

$$\begin{aligned} f(x) &= y, x \geq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 &= y \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= y - 1, y \geq 1 \\ \Leftrightarrow x &= (y - 1)^2, y \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = (x - 1)^2, x \geq 1$$

B2. Έστω $M(x_0, f^{-1}(x_0))$ σημείο της $C_{f^{-1}}$ με $x_0 \geq 1$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο M είναι $(\varepsilon): y - f^{-1}(x_0) = (f^{-1})'(x_0)(x - x_0)$

Το $A(0, -3)$ ανήκει στην (ε) άρα $-3 - f^{-1}(x_0) = (f^{-1})'(x_0)(0 - x_0) \quad (1)$

Έχουμε ότι: $f^{-1}(x_0) = (x_0 - 1)^2$ και $(f^{-1})'(x_0) = 2(x_0 - 1)$

Άρα η (1) γίνεται

$$-3 - (x_0 - 1)^2 = 2(x_0 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow -3 - x_0^2 + 2x_0 - 1 = (2x_0 - 2)(-x_0)$$

$$\Leftrightarrow -x_0^2 + 2x_0 - 4 = -2x_0^2 + 2x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \quad (x_0 > 0)$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $(\varepsilon): y - f^{-1}(2) = (f^{-1})'(2)(x - 2)$

$$f^{-1}(2) = (2 - 1)^2 = 1 \text{ και } (f^{-1})'(2) = 2(2 - 1) = 2$$

Επομένως $(\varepsilon): y - 1 = 2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 3$

B3. Για την συνάρτηση $g \circ g$ έχουμε

$$A_{g \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_g\}$$

δηλαδή $x \neq 2$ και $g(x) \neq 2$

$$\text{Άρα: } g(x) \neq 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} \neq 2 \Leftrightarrow 2x+1 \neq 2x-4 \Leftrightarrow 0x \neq -5, \text{ το}$$

οποίο ισχύει για κάθε $x \neq 2$

Επομένως $A_{g \circ g} = \mathbb{R} - \{2\}$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) + 1}{\frac{2x+1}{x-2} - 2} = \frac{\frac{4x+2}{x-2} + 1}{\frac{2x+1}{x-2} - 2} = \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-2}} = \frac{5x}{5} = x$$

Άρα $(g \circ g)(x) = x, x \neq 2$

Ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1} είναι η ευθεία $y = x$.

B4. Για το $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(g(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right)$ έχουμε

$$\left| g(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right| = |g(x)| \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right| \leq |g(x)|$$

Άρα $-|g(x)| \leq g(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{2x+1}\right) \leq |g(x)|$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} |g(x)| = 0$ οπότε και $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (-|g(x)|) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(g(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνεχής στο $A_f = (-\infty, 1]$ άρα και στο $x = 1$ επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Για $x < 1$ έχουμε $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x - 1}$

$$f(x) = \frac{x^3(x-1) + (x-1)(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x^3 + x + 1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x + 1$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x + 1) = 3$ επομένως $f(1) = 3$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει $f(x) = x^3 + x + 1, x \leq 1$

(β) Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = (-\infty, 1]$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_f = (-\infty, 1]$ άρα

$$f(A_f) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 3]$$

Η f συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολυωνυμική

$f(-1) = -1$ και $f(0) = 1$ δηλαδή $f(-1) \cdot f(0) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 0)$ ώστε $\boxed{f(x_0) = 0}$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα το x_0 μοναδικό.

Γ2. Ισχύει $g^2(x) = 2xg(x) + 3$ για κάθε $x \geq 1$

Άρα για κάθε $x \geq 1$ έχουμε :

$$g^2(x) - 2xg(x) = 3 \Leftrightarrow g^2(x) - 2xg(x) + x^2 = x^2 + 3 \Leftrightarrow (g(x) - x)^2 = x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(g(x) - x)^2} = \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow |g(x) - x| = \sqrt{x^2 + 3} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - x, x \geq 1$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow |\varphi(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 0 \text{ αδύνατη}$$

Άρα $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 1$ και επειδή είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών) θα διατηρεί πρόσημο στο $[1, +\infty)$

Η g έχει ελάχιστη τιμή το 3 στη θέση 1 δηλαδή $g(1) = 3$

Άρα $\varphi(1) = g(1) - 1 = 2 > 0$ και αφού διατηρεί πρόσημο συμπεραίνουμε ότι $\varphi(x) > 0$ στο $[1, +\infty)$

$$\text{Άρα από την (1) προκύπτει } g(x) - x = \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow g(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$$

Γ3. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3}) = +\infty$

$$\text{Επίσης } -1 < x_0 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{x_0}{2} < 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{x_0}{2}\right) < f(0) \Leftrightarrow \frac{3}{8} < f\left(\frac{x_0}{2}\right) < 1$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ για κάθε $a \in (0, 1)$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)^{g(x)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)^u = 0,$$

$$(*) \text{ θέτουμε } u = g(x) \text{ άρα } u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Άρα η εξίσωση γίνεται $\eta\mu(f(x)) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

Γ4. Για $x \neq 1$ και $x \neq 0$ η εξίσωση $\frac{f(-x_0)+1}{x} + \frac{f(x_0+x)}{x-1} = 0$ γίνεται

$$(x-1)(f(-x_0)+1) + x \cdot f(x_0+x) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x-1)(f(-x_0)+1) + x \cdot f(x_0+x)$

Η h συνεχής στο $[0,1]$

$$h(0) = -(f(-x_0)+1) = -f(-x_0) - 1 = -(-x_0^3 - x_0 + 1) - 1 = -3 < 0$$

$$\text{Διότι: } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -x_0^3 - x_0 = 1$$

$$h(1) = f(x_0+1) > 0$$

$$\text{Διότι: } -1 < x_0 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_0 + 1 < 1 \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(0) < f(x_0+1) < f(1) \Leftrightarrow 0 < f(x_0+1) < 3$$

$$\text{Δηλαδή } h(0) \cdot h(1) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Για το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h}$ θέτουμε $x = 1-h$ άρα $h = 1-x$

$$\text{Όταν } h \rightarrow 0 \text{ τότε } x \rightarrow 1 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(1) - g(x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1)$$

$$\text{Άρα } g(x) = \begin{cases} \ln x + 2g'(1), & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3\kappa, & x \geq 1 \end{cases}$$

Η g συνεχής στο 1 αφού είναι παραγωγίσιμη άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) \text{ άρα } \boxed{2g'(1) = 3\kappa - 1} \quad (1)$$

$$\text{Αφού είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα ισχύει } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x} + 3\kappa - (3\kappa - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x-1}{x}}{x-1} = 1 \text{ άρα } g'(1) = 1$$

Άρα από την σχέση (1) προκύπτει $\kappa = 1$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 2g'(1) - 2g'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\text{Άρα } g(x) = \begin{cases} \ln x + 2, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3 & x \geq 1 \end{cases}$$

Δ2. Ισχύει $g(1) = 2$ και $g'(1) = 1$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$ είναι η $y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x + 1}$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f , η εξίσωση εφαπτομένης στο M είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \boxed{y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0}$$

Θα πρέπει το σύστημα $\begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 1 \end{cases}$ να έχει λύση

Από την εξίσωση $f'(x_0) = 1$ έχουμε $e^{x_0-1} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0-1} = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Η $x_0 = 1$ επαληθεύει και την $f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 1$ άρα η $y = x + 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(1, 2)$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = g'(x) - f(x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Η $g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ αφού είναι συνεχής σε κάθε

ένα από τα διαστήματα $(0, 1), [1, +\infty)$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = g'(1) = 1$

άρα και στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Έστω $h(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1} - 1$ με $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Η h συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$ ενώ $h(1) = -1$ δηλαδή

$h\left(\frac{1}{2}\right) \cdot h(1) < 0$ επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε $h(x_0) = 0$

Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} - 1 > \frac{1}{x_2} - 1 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \Leftrightarrow -e^{x_1-1} > -e^{x_2-1} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει $h(x_1) > h(x_2)$, άρα η h γνησίως φθίνουσα επομένως το x_0 μοναδικό .

Δ4. Η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{x-1} + 1 + x$ ορίζεται στο $A_\varphi = [0, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \Leftrightarrow e^{x_1-1} + 1 < e^{x_2-1} + 1$
- $x_1 < x_2$

Με πρόσθεση προκύπτει $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα

Για κάθε $x \geq 1$ έχουμε

$$e^{g(x)-1} + g(x) \geq e + 2 \Leftrightarrow e^{g(x)-1} + g(x) + 1 \geq e + 3 \Leftrightarrow \varphi(g(x)) \geq \varphi(2) \Leftrightarrow g(x) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} + 3 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1, \text{ που ισχύει}$$