

ΤΑΞΗ:

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
& ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τετάρτη 27 Απριλίου 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Λάθος

Θέμα Β

B1. Η $f = \log$ ορίζεται για $x > 0$ και $\ln x \neq 0$ δηλαδή

$$\text{όταν } 0 < x \neq 1 \text{ με τύπο } (\log)(x) = \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \frac{x}{\ln x}$$

B2. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ Το πρόσημο της f' και ημονοτονία της f φαίνεται στο διπλανό
πίνακα.

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η f για $x = e$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(e) = e$.

$$B3. f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - \frac{2}{x}\ln x(\ln x - 1)}{(\ln x)^4} = \frac{\ln x \cdot (-\ln x + 2)}{x \cdot (\ln x)^4}$$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	-	
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κοίλη	

Είναι $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ $-\ln x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2$ Η f για $x = e^2$ παρουσιάζει καμπή $M\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ το σημείο καμπής.

$$B4. \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 0 \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν $x \rightarrow 0^+$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0$ και $\ln x < 0$ αριστερά του 1.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

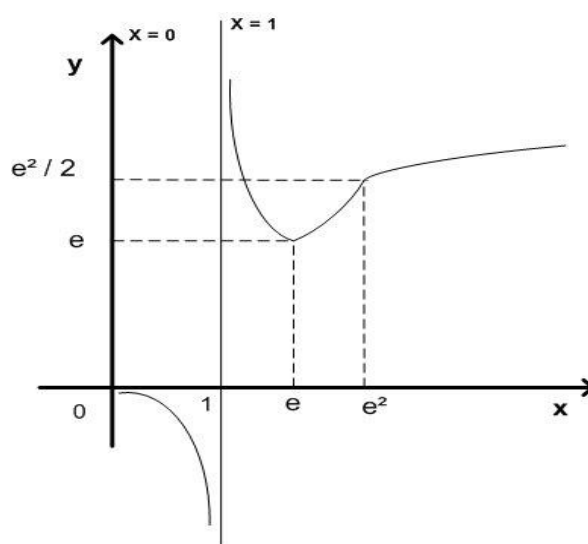
διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0$ και $\ln x > 0$ δεξιά του 1.

Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow 1$.

Πίνακας μεταβολών της f

x	0	1	e	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	
$f''(x)$	-	+	+	-	
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow$			$+\infty$

Γραφική παράσταση



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad f(e) = e, \quad f(e^2) = \frac{e^2}{2}$$

Θέμα Γ

Γ1. • Η f είναι συνεχής στο $x=0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

απ' όπου προκύπτει $\alpha = 1 + \beta$ (1)

$$\bullet f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot f(e-1) < 0 \Leftrightarrow (\alpha-1) \cdot (2+\beta) < 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\alpha-1) \cdot (\alpha+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1. \text{ Επειδή } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ είναι } \alpha = 0 \text{ οπότε } \beta = -1$$

Γ2. Για κάθε $x > 0$, $f(x) - \frac{x^2 - x}{2} \leq \ln \lambda$ (2)

Έστω $\varphi(x) = \ln(x+1) - \frac{x^2 - x}{2}$, $x > 0$. Είναι $\varphi'(x) = \dots = \frac{-2x^2 - x + 3}{2(x+1)}$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	-	
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Η μονοτονία της φ φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Η φ για $x=1$ παρουσιάζει μέγιστο
το $\varphi(1) = \ln 2$.

Ισχύει η (2) για κάθε $x > 0$ και $\lambda > 0$ όταν
 $\max \varphi(x) \leq \ln \lambda \Leftrightarrow \ln 2 \leq \ln \lambda \Leftrightarrow \lambda \geq 2$. Η μικρότερη τιμή του λ είναι $\lambda = 2$.

Γ3. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \varepsilon \varphi x \, dx + \int_0^{e-1} \ln(x+1) \, dx = I_1 + I_2$

• $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \varepsilon \varphi x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} \, dx = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{(\sigma \upsilon \nu x)'}{\sigma \upsilon \nu x} \, dx = - [\ln(\sigma \upsilon \nu x)]_{-\frac{\pi}{4}}^0 =$
 $= -\ln(\sigma \upsilon \nu 0) + \ln\left(\sigma \upsilon \nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \dots = -\frac{1}{2} \ln 2$

• $I_2 = \int_0^{e-1} (x+1)' \ln(x+1) \, dx = \int_1^e u' \ln u \, du = (\text{θέτω } x+1 = u)$
 $= [u \cdot \ln u]_1^e - \int_1^e 1 \cdot du = e - (e-1) = 1$

Άρα $I = -\frac{1}{2} \ln 2 + 1$

Γ4. Είναι $\varepsilon \varphi \theta = f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$, $\alpha > 0$. Τα α και θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t ,

έστω $\alpha(t)$ και $\theta(t)$ αντίστοιχα.

Έχουμε $\varepsilon \varphi \theta(t) = \frac{1}{\alpha(t)+1}$ οπότε $\theta'(t) \cdot \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 \theta(t)} = -\frac{\alpha'(t)}{(1+\alpha(t))^2}$

• Για $t = t_0$, $\theta'(t_0) = -\frac{\alpha'(t_0)}{(1+\alpha(t_0))^2} \cdot \sigma \upsilon \nu^2 \theta(t_0)$ (3)

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύουν $\alpha'(t_0) = 1 \frac{cm}{sec}$ και $\alpha(t_0) = \sqrt{3} - 1$

Είναι $\varepsilon \varphi \theta(t_0) = \frac{1}{\alpha(t_0)+1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $\theta(t_0) = \frac{\pi}{6}$ και

$$\sigma\upsilon\nu\theta(t_0) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Επομένως με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει :}$$

$$\theta'(t_0) = -\frac{1}{(\sqrt{3}-1+1)^2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Θέμα Δ

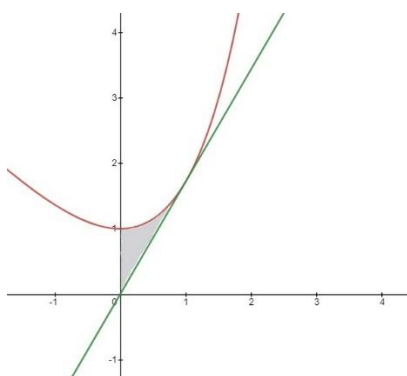
Δ1. Για $x=0$ είναι $f(0)=1$ οπότε ισχύει $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και το 0 είναι εσωτερικό σημείο. Σύμφωνα με το Θ. Fermat είναι $f'(0) = 0$. Επομένως

$$e^0 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(1, e-1)$ είναι

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = (e-1)x$$



Το ζητούμενο εμβαδόν

$$E = \int_0^1 |f(x) - (e-1)x| dx$$

επειδή $f''(x) = e^x > 0$ η f είναι κυρτή.

Άρα $f(x) \geq (e-1)x$ οπότε

$$E = \int_0^1 (e^x - x - ex + x) dx = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - 1 \text{ τ.μ.}$$

Δ3. $g(x) = \ln e^x - \ln(e^x - x) = x - \ln(e^x - x), x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x} \text{ και } g''(x) = \frac{(x-2)e^x + 1}{(e^x - x)^2} = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}, \text{ όπου } h(x) = (x-2)e^x + 1, x \in \mathbb{R}$$

➤ Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g''(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1, x_2 και στη συνέχεια ότι η $g''(x)$ αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά των x_1, x_2 .

Δηλαδή αρχικά ότι η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, βρίσκοντας το σύνολο τιμών της.

- Είναι $h(x) = (x-2)e^x + 1, \quad h'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		-		+	
$h(x)$	1	$\searrow$	1-e	$\nearrow$	$+\infty$

$$h(1) = 1 - e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-2)e^x + 1] = 0 + 1 = 1 \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\frac{1}{e^x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)'}{\left(\frac{1}{e^x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

- Αν $x \in (-\infty, 1] = A_1$ τότε $h(A_1) = [1-e, 1]$ και η $h \downarrow$

Επειδή $0 \in h(A_1)$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_1 \in (-\infty, 1)$,

επομένως και η $g''(x) = 0$.

- Αν $x \in [1, +\infty) = A_2$ τότε $h(A_2) = [1-e, +\infty)$ και η $h \uparrow$

Επειδή $0 \in h(A_2)$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_2 \in (1, +\infty)$,

επομένως και η $g''(x) = 0$.

- Θα βρούμε το πρόσημο της $h(x)$ στο $(-\infty, 1)$ από τη μονοτονία της και τη ρίζα της x_1 .

- Για κάθε $x < x_1$ είναι $h(x) > h(x_1) = 0$ και για κάθε $x_1 < x < 1$ είναι $h(x) < h(x_1) = 0$

- Όμοια το πρόσημο της $h(x)$ στο $(1, +\infty)$ από τη μονοτονία της και τη ρίζα της x_2 .

- Για κάθε $1 < x < x_2$ είναι $h(x) > h(x_2) = 0$ και για κάθε $x > x_2$ είναι $h(x) < h(x_2) = 0$.

Το πρόσημο της $h(x)$ είναι και πρόσημο της $g''(x)$.

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$g''(x)$	+	-	-	+	
$g(x)$	κυρτή	κοίλη		κυρτή	

Επομένως όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα η συνάρτηση g παρουσιάζει καμπή ακριβώς στα x_1 και x_2

Δ4. Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση g στο $[x_1, 1]$.

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, 1)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(1) - g(x_1)}{1 - x_1} \Leftrightarrow (1 - x_1) \cdot g'(\xi_1) = g(1) - g(x_1) \quad (1)$$

- Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση g στο $[1, x_2]$.

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (1, x_2)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(x_2) - g(1)}{x_2 - 1} \Leftrightarrow (x_2 - 1) \cdot g'(\xi_2) = g(x_2) - g(1) \quad (2)$$

α' μέθοδος

- Η $g(x)$ είναι κοίλη στο $[x_1, x_2]$, άρα $g' \downarrow$ οπότε από $x_1 < \xi_1 < 1$

έχουμε $1 - x_1 > 0$ και $g'(\xi_1) > g'(1) = 0$.

$$\text{Επομένως } (1 - x_1)g'(\xi_1) > 0 \quad (3)$$

- από $1 < \xi_2 < x_2$ έχουμε $x_2 - 1 > 0$ και $g'(\xi_2) < g'(1) = 0$.

$$\text{Επομένως } (x_2 - 1)g'(\xi_2) < 0 \quad (4)$$

Συνεπώς από (3) και (4) προκύπτει: $(1 - x_1)g'(\xi_1) > (x_2 - 1)g'(\xi_2)$

β' μέθοδος

$$\text{Είναι } g'(x) = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{-x + 1}{e^x - 1}$$

- Η $g \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$ και $x_1 < 1$ άρα $g(1) > g(x_1) \Leftrightarrow g(1) - g(x_1) > 0$.

$$\text{Επομένως από την (1) συμπεραίνουμε ότι: } (1 - x_1)g'(\xi_1) > 0 \quad (5).$$

- Η $g \downarrow$ στο $[1, +\infty)$ και $x_2 > 1$ άρα $g(x_2) < g(1) \Leftrightarrow g(x_2) - g(1) < 0$.

$$\text{Επομένως από τη (2) συμπεραίνουμε ότι: } (x_2 - 1)g'(\xi_2) < 0 \quad (6).$$

Συνεπώς από (5) και (6) προκύπτει: $(1 - x_1)g'(\xi_1) > (x_2 - 1)g'(\xi_2)$