



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Η απόδειξη βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 106.
A2. Ο ορισμός βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 33.
A3. Η διατύπωση του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 51.
A4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Εφόσον η κλίση της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ είναι ίση με 2 τότε ισχύει : $f'(0) = 2$

Η f παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\alpha x - 1}{\alpha x + 1} \right)' = \frac{(\alpha x - 1)' \cdot (\alpha x + 1) - (\alpha x - 1) \cdot (\alpha x + 1)'}{(\alpha x + 1)^2} = \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha x + 1) - \alpha(\alpha x - 1)}{(\alpha x + 1)^2} = \frac{\alpha^2 x + \alpha - \alpha^2 x + \alpha}{(\alpha x + 1)^2} = \frac{2\alpha}{(\alpha x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f'(0) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

B2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x > -1$ μετασχηματίζεται ως εξής :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1+1-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

Έστω $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1} \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{x_1 + 1} < -\frac{2}{x_2 + 1} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x_1 + 1} < 1 - \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1 άρα αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $A = (-1, +\infty)$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (-1, +\infty)$ άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 1) = A_{f^{-1}}$$

Διότι : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(x-1) \cdot \frac{1}{x+1} \right] = (-2) \cdot (+\infty) = -\infty$

Αφού $x+1 > 0$ για κάθε $x > -1$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

$f(x) = y$ με $x \in (-1, +\infty)$ και $y \in (-\infty, 1)$

$$\frac{x-1}{x+1} = y \Leftrightarrow x-1 = xy + y \Leftrightarrow x - xy = y+1 \Leftrightarrow x(1-y) = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{1-y}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$ με $A_{f^{-1}} = (-\infty, 1)$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1 με το θεώρημα $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και στην συνέχεια να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x παίρνοντας τους περιορισμούς που ισχύουν για το x και όσους προκύπταν από την επίλυση της εξίσωσης.

B3. Για να ορίζεται η $f^{-1} \circ f^{-1}$ πρέπει : $x \in A_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x) \in A_{f^{-1}}$

Δηλαδή

$$x < 1$$

και

$$\frac{x+1}{1-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-1+x}{1-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} < 0 \Leftrightarrow x(1-x) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + x < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x < 0 \text{ και επειδή πρέπει και } x < 1 \text{ άρα } A_{f^{-1} \circ f^{-1}} = (-\infty, 0)$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x+1+x}{1-x-1-x} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}$$

B4. Η συνάρτηση $f^{-1}(e^x)$ ορίζεται όταν $x \in \mathbb{R}$ και $e^x < 1$ άρα $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(e^x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+e^x}{1-e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(1+e^x) \cdot \frac{1}{1-e^x} \right] = +\infty$$

$$\text{Διότι: } \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+e^x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-e^x) = 0 \text{ και όταν}$$

$$x < 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow 1-e^x > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-e^x} = +\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι

$$(\varepsilon_1): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$$

$$\text{Η } (\varepsilon_1) \text{ και η } (\varepsilon): y = 4x - \frac{1}{2} \text{ ταυτίζονται άρα : } f'(1) = 4 \text{ και } f(1) - f'(1) = -\frac{1}{2}$$

- $f(x) = \lambda x^3 + x + \frac{3}{2}$ επομένως $f(1) = \lambda + \frac{5}{2}$

- $f'(x) = 3\lambda x^2 + 1$ επομένως $f'(1) = 3\lambda + 1$

$$f'(1) = 4 \Leftrightarrow 3\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

και

$$f(1) - f'(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda + \frac{5}{2} - 3\lambda - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Άρα για $\lambda = 1$ η $(\varepsilon) : y = 4x - \frac{1}{2}$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

Γ2. Για $x < 0$ είναι : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = 0$$

διότι :

Υπολογίζουμε το κάθε όριο ξεχωριστά έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \cdot \sqrt{1 + 0} = 0 \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει : $\left| \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| = \frac{|\sin^2 x|}{|x^2|} \leq \frac{1}{x^2}$, άρα $\left| \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 0$$

Γ3. Για $\lambda = 1$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ x^3 + x + \frac{3}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

$$f(0) = \frac{3}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^3 + x + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma \nu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - (1 - \eta \mu^2 x)}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2 (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{x^2 (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} + \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} + 1^2 = \frac{3}{2}$$

Άρα η f συνεχής στο $x = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \frac{3}{2}$

Γ4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 + x + \frac{3}{2} \right) \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x^3} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + x + \frac{3}{2}}{x^3} \cdot x^3 \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x^3} \right) \right] = 1$$

Διότι υπολογίζοντας τα όρια ξεχωριστά έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + \frac{3}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$$

(*) Θέτουμε $u = \frac{1}{x^3}$ και $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει : $f^2(x) - 2\sin x \cdot f(x) = 3 + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

Η (1) ισοδύναμα γίνεται :

$$f^2(x) - 2\sin x \cdot f(x) = 3 + 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow f^2(x) - 2\sin x \cdot f(x) + \sin^2 x = 4$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - \sin x)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(f(x) - \sin x)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |f(x) - \sin x| = 2$$

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sin x, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - \sin x| = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ αδύνατη.}$$

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η $g(x) = f(x) - \sin x, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} .

Για $x = 0$ η (1) γίνεται :

$$f^2(0) - 2 \cdot f(0) = 3 \Leftrightarrow f^2(0) - 2 \cdot f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 3 \text{ ή } f(0) = -1 \text{ και λόγω της υπόθεσης } f(0) > 0 \text{ δεκτή η } f(0) = 3$$

Για $x = 0, g(0) = f(0) - \sin 0 \Leftrightarrow g(0) = 2$ και επειδή η g διατηρεί πρόσημο $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $f(x) - \sin x = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 + \sin x$

$$\Delta 2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - f(x) + f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right) = f'(x) - (-f'(x)) = 2f'(x) \text{ διότι :}$$

$$\text{Το πρώτο όριο είναι : } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = f'(x)$$

$$\text{Για το δεύτερο όριο } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right)$$

θέτουμε $h = -u$ άρα όταν $h \rightarrow 0$ και $u \rightarrow 0$

$$\text{Άρα : } \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+u) - f(x)}{-u} \right) = - \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+u) - f(x)}{u} \right) = -f'(x)$$

Η $f(x) = \sin x + 2$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = -\eta\mu x$ επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = -2\eta\mu x$$

Δ3. Η $\varphi(x) = \ln(\sin x + 2)$ είναι συνεχής στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως σύνθεση συνεχών

συναρτήσεων και $\varphi(0) = \ln 3$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln 2$.

Ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα $[\ln 2, \ln 3]$ που ορίζουν οι τιμές της φ

στα άκρα άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 1$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x) = \varphi(x) - 1$ και να εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ4. Ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $f(\xi) = \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)}$ για

κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x + 2$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Διότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \stackrel{\text{συν}\lambda}{\Leftrightarrow} \underset{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{\text{συν}x_1} > \text{συν}x_2 \Leftrightarrow \text{συν}x_1 + 2 > \text{συν}x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0) \right] = [2, 3]$

Έχουμε:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \stackrel{f\lambda}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\alpha) < f(0) \Leftrightarrow 2 < f(\alpha) < 3$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \stackrel{f\lambda}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\beta) < f(0) \Leftrightarrow 2 < f(\beta) < 3$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί) έχουμε

$$4 < f(\alpha) \cdot f(\beta) < 9 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < 3$$

Επομένως από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)},$$

Το ξ είναι μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο Δ .

Β' τρόπος

Υπόδειξη με το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση

$\varphi_1(x) = f^2(x) - f(\alpha) \cdot f(\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$ και τη μονοτονία της $f^2(x)$ για τη μοναδικότητα της ρίζας.