ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 106 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός σελίδα 95 σχολικού βιβλίου

Α3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{|x|}{x}, x\neq 0$ για την οποία ισχύει :

$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{|x|}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|}=1$, όμως το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ δεν υπάρχει αφού

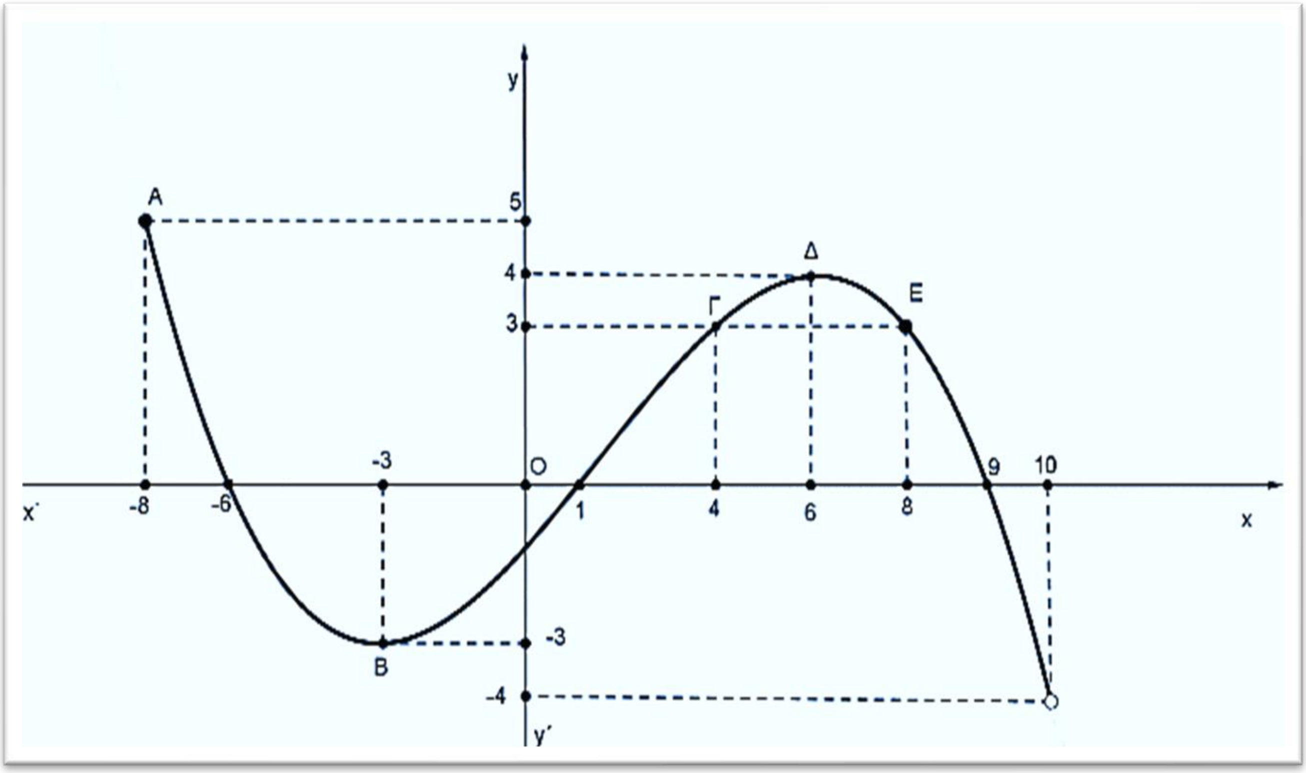
$f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1\ , x>0\end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Α4. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A=[-8,10)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1=[-8,-3]$, γνησίως αύξουσα στο



διάστημα $A_2 = [3,6]$ ενώ στο διάστημα $A_3 = [6,10)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f συνεχής στο A και τα σύνολα τιμών της σε κάθε ένα από τα διαστήματα μονοτονίας της είναι :

$$f(A_1) = [f(-3), f(-8)] = [-3, 5]$$

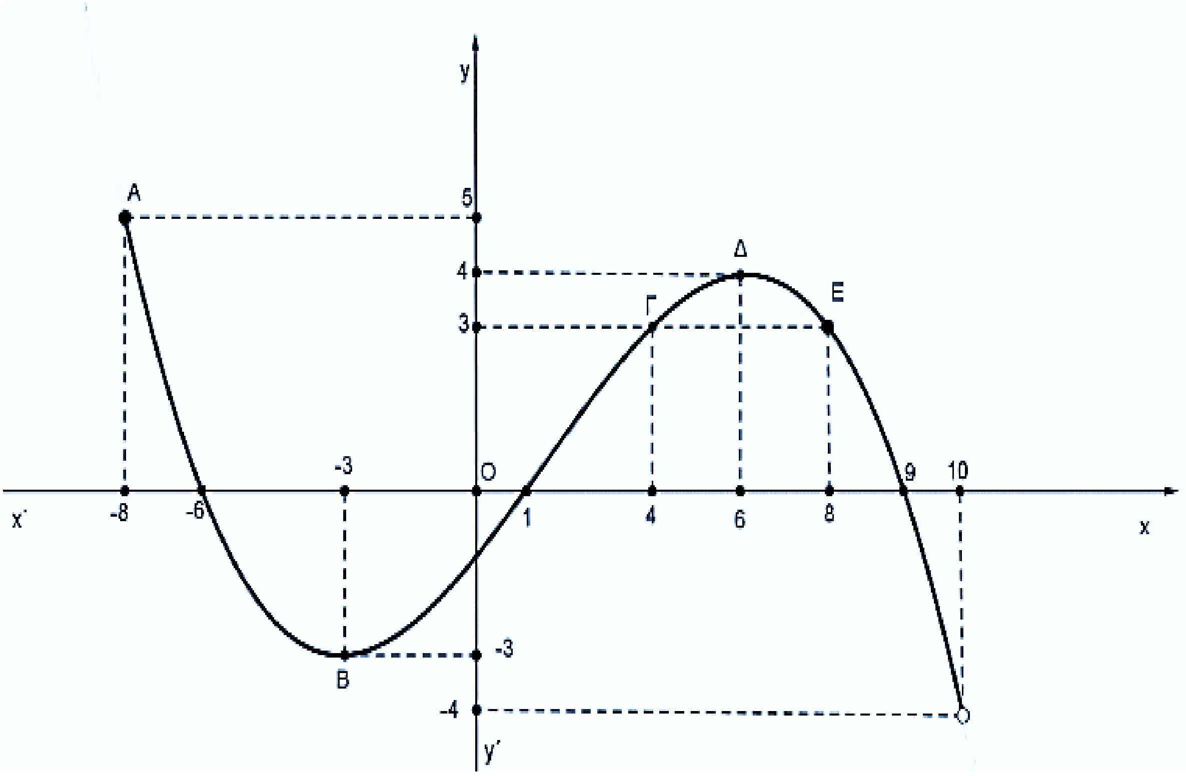
$$f(A_2) = [f(-3), f(6)] = [-3, 4]$$

$$f(A_3) = \left(\lim_{x\to 10} f(x), f(6)\right] = (-4, 4]$$

Β2.

(i) για τιμές του x κοντά στο 6 ισχύει $f(x)<4$ άρα $f(x)-4<0$ κοντά στο 6 και

$\lim\limits_{x\to 6}(f(x)-4)=0$ επομένως $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)-4}=-\infty$



(ii) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 9}f(x)=0$ όμως $f(x)>0$ όταν $x\to 9^-$ άρα $\lim\limits_{x\to 9^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ενώ

$f(x)<0$ όταν $x\to 9^+$ άρα $\lim\limits_{x\to 9^+}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$,άρα το $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

(iii) Θέτουμε $u=f(x)$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$ οπότε : $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=f(0)<0$

,επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και $x-1>0$ για $x<1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ άρα

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(f(x))}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left[f(f(x))\cdot\frac{1}{x-1}\right]=f(0)\cdot(+\infty)\overset{f(0)<0}{=}-\infty$$

B3. Η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta=[4,6]$ άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta)=[f(4),f(6)]=[3,4]$, Το $\pi\in f(\Delta)$ άρα υπάρχει $x_0\in(4,6)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\pi$, το x_0 μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα στο Δ.

(Μπορούμε επίσης να κάνουμε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για την f στο $[4,6]$ ή ακόμη και θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $f(x)-\pi$ στο ίδιο διάστημα)

Ισχύει $4<x_0<6\Rightarrow 6<x_0+2<8$,στο διάστημα $[6,8]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(6)>f(x_0+2)>f(8)\Leftrightarrow 3<f(x_0+2)<4$

B4. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$2021(f(x)-2021)\cdot f(x)+2021=f(x)\Leftrightarrow 2021(f(x)-2021)f(x)+2021-f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2021\cdot f(x)\cdot(f(x)-2021)-(f(x)-2021)=0\Leftrightarrow(f(x)-2021)(2021f(x)-1)=0$$

Το 2021 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα $f(x)-2021\neq 0$ για κάθε $x\in A$ επομένως από την τελευταία εξίσωση έχουμε $f(x)=\frac{1}{2021}$ η οποία έχει τρείς ακριβώς ρίζες διότι:

- ο αριθμός $\frac{1}{2021}$ ανήκει στο $f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-6,-3)$ τέτοιος ώστε $f(x_1)=\frac{1}{2021}$ το x_1 μοναδικό διότι η f γνησίως φθίνουσα στο A_1
- ο αριθμός $\frac{1}{2021}$ ανήκει στο $f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in A_2$ τέτοιος ώστε $f(x_2)=\frac{1}{2021}$ το x_2 μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα στο A_2
- ο αριθμός $\frac{1}{2021}$ ανήκει στο $f(A_3)$ άρα υπάρχει $x_3\in A_3$ τέτοιος ώστε $f(x_3)=\frac{1}{2021}$ το x_3 μοναδικό διότι η f γνησίως φθίνουσα στο A_3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

(α) Το σημείο $A(1,f(1))$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-2x+5$

άρα $f(1)=-2\cdot 1+5 \Leftrightarrow f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3$ **(1)**

Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι το $f'(1)$

οπότε $f'(1)=-2 \Leftrightarrow 2\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-1$

Αντικαθιστώντας την τιμή του α στην **(1)** προκύπτει $\beta=4$

Άρα $f(x)=-x^2+4, x\geq 0$

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε:
$x_1^2<x_2^2 \Rightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Rightarrow -x_1^2+4>-x_2^2+4 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$,άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A_f=[0,+\infty)$ και επειδή η f συνεχής στο A_f ως πολυωνυμική το σύνολο τιμών της είναι $f(A_f)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,4]$

(β) $A_{g\circ h}=\begin{cases} x\in A_h \\ h(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ -x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x\leq 4 \end{cases}$ άρα $A_{g\circ h}=(-\infty,4]$

και $(g\circ h)(x)=g(h(x))=\sqrt{-x+4}$

Γ2.

(α) Η f γνησίως μονότονη στο A_f άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f είναι το σύνολο τιμών της f επομένως για να βρούμε την αντίστροφη θα λύσουμε ως προς x την εξίσωση $f(x)=y$ με $x\geq 0$ και $y\leq 4$

$f(x)=y \Leftrightarrow -x^2+4=y \Leftrightarrow x^2=4-y \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{4-y} \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{4-y}$

Άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x}$ με $A_{f^{-1}}=(-\infty,4]$

Όμως $(g\circ h)(x)=g(h(x))=\sqrt{-x+4}$ με $A_{g\circ h}=(-\infty,4]$

Άρα $A_{f^{-1}} = A_{g\circ h} = A$ και $f^{-1}(x) = (g\circ h)(x)$ για κάθε $x \in A$ επομένως οι συναρτήσεις f^{-1} και $g\circ h$ είναι ίσες.

(β) Α-τρόπος

Θέτουμε $u = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow u^2 = 4-x \Leftrightarrow x = 4-u^2$ και $u_0 = \lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4-x} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x)+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}+x\right) = \lim_{u\to+\infty}\left(u+4-u^2\right) = -\infty$$

Β-τρόπος

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x)+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(-x\cdot\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}+x\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}-1\right)\cdot\right] = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty$$

Γ3.

(α) Έστω $M(x_1, f(x_1))$ τυχαίο σημείο της C_f, η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στο Μ είναι: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1)$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $B(0,8)$ άρα:

$$8 - f(x_1) = f'(x_1)(0-x_1) \Leftrightarrow 8 - \left(-x_1^2+4\right) = -2x_1(-x_1)$$

$$\Leftrightarrow 8 + x_1^2 - 4 = 2x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \overset{x_1\ge 0}{\Leftrightarrow} x_1 = 2$$

Επομένως $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 0 = -4(x-2) \Leftrightarrow y = -4x+8$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $q(x) = f(x) - f^{-1}(x)$ με $A_q = A_f \cap A_{f^{-1}} = [0,4]$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $[1,2]$ στο οποίο η q είναι συνεχής και επιπλέον $q(1) = f(1) - f^{-1}(1) = 3-\sqrt{3} > 0$ ενώ $q(2) = -\sqrt{2} < 0$ δηλαδή $q(1)\cdot q(2) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $q(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - f^{-1}(x_0) = 0$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται σε σημείο x_0 το οποίο ανήκει στο διάστημα

$(1, x_1)$,όπου $x_1 = 2$ η τετμημένη του σημείου επαφής της εφαπτομένης του ερωτήματος **(α)** με την C_f

Γ4. Για το όριο $\lim\limits_{x \to x_0}\left[\left(\left(x^2-4\right)^2+x-4\right)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)}\right)\right]$

Έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0}\left[\left(\left(x^2-4\right)^2+x-4\right)\right]=\lim_{x \to x_0}\left[\left(\left(x^2-4\right)^2-(4-x)\right)\right]=\lim_{x \to x_0}\left[\left(f(x)\right)^2-\left(f^{-1}(x)\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{x \to x_0}\left[\left(f(x)\right)-\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f(x)\right)+\left(f^{-1}(x)\right)\right]=0\cdot\left(f(x_0)+f^{-1}(x_0)\right)=0$$

Για λόγους απλότητας θέτουμε $g(x)=\left(\left(x^2-4\right)^2+x-4\right)$όπου $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=0$ και από το **Γ3 (β)** το όριο γράφεται : $\lim\limits_{x \to x_0}\left[g(x)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{q(x)}\right)\right]$ όπου $\lim\limits_{x \to x_0} q(x)=q(x_0)=0$

$$\left|g(x)\cdot ημ\left(\frac{1}{q(x)}\right)\right|=\left|g(x)\right|\cdot\left|ημ\left(\frac{1}{q(x)}\right)\right|\le\left|q(x)\right|\cdot 1=\left|q(x)\right| \text{ άρα}$$

$-\left|q(x)\right|\le g(x)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{q(x)}\right)\le\left|q(x)\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x \to x_0}\left|q(x)\right|=0$ άρα και $\lim\limits_{x \to x_0}\left(-\left|q(x)\right|\right)=0$ από κριτήριο παρεμβολής έχουμε : $\lim\limits_{x \to x_0}\left[g(x)\cdot ημ\left(\dfrac{1}{q(x)}\right)\right]=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη σχέση $x^2\cdot f^2(x)=1+\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x)$ για κάθε $x>0$

προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x)=\left(x^2\cdot f^2(x)-1\right)\in\mathbb{R}$ οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x)=k$

άρα : $x^2\cdot f^2(x)=1+k$ για κάθε $x>0$ άρα $f^2(x)=\dfrac{1+κ}{x^2}$

Επομένως : $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1+k}{x^2}=0$

Άρα ισχύει : $x^2 \cdot f^2(x)=1$ για κάθε $x>0$

$x^2 \cdot f^2(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow |f(x)|=\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |f(x)|=\frac{1}{x}$, αφού $x>0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow |f(x)|=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=0$ αδύνατη.

Η f συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα διατηρεί πρόσημο.

Άρα: $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$ ή $f(x)=-\frac{1}{x}, x>0$

Όμως η f τέμνει την $y=x$ σε ένα μόνο σημείο.

Αν $f(x)=-\frac{1}{x}, x>0$ τότε $-\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη επομένως $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$ αφού η $\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2=1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$

Δ2.

(α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Ισχύουν: $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της f στο Μ είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y-1=-x+1 \Leftrightarrow y=-x+2$

Για τα σημεία που τέμνει η εφαπτομένη της f στο Μ τους άξονες έχουμε:

Για $y=0$ παίρνουμε $x=2$ ενώ για $x=0$ παίρνουμε $y=2$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2,0)$ και τον $y'y$ στο σημείο $B(0,2)$

(β) Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)=(1,1)$ το οποίο ταυτίζεται με το σημείο Μ άρα Μ μέσο του ΑΒ

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με :

$$E=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot|x_A|\cdot|y_B|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\tau.\mu$$

Δ3.

(α) Η εξίσωση της διαγώνιού του τετραγώνου ΟΚΜΛ είναι η $y=x$,αφού τα σημεία $O(0,0)$ και $M(1,1)$ από τα οποία περνάει ανήκουν στην διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων που είναι η ευθεία την παραπάνω εξίσωση.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0,1]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x, x\in[0,1]$ η οποία είναι συνεχής.

Επιπλέον $h(0)=g(0)>0$ και $h(1)=g(1)-1<0$ δηλαδή $h(0)\cdot h(1)<0$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=x_0$

Σύμφωνα με τα παραπάνω σε κάθε περίπτωση η C_g τέμνει την $y=x$ σε σημείο του διαστήματος $(0,1)$, επίσης για κάθε $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$ έχουμε $g(x_1)>g(x_2)$,και $-x_1>-x_2$ άρα $h(x_1)>h(x_2)$ δηλαδή η h γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα το x_0 μοναδικό.

(β) $g(x^3)-g(x^2)\geq x^3-x^2 \Leftrightarrow g(x^3)-x^3\geq g(x^2)-x^2 \Leftrightarrow h(x^3)\geq h(x^2) \Leftrightarrow x^3\leq x^2$

$x^3-x^2\leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)\leq 0$, η τελευταία ισχύει για κάθε $x\in[0,1]$

Δ4. Θεωρούμε $q(x)=4x^4+8x^3-1$ με $x\in[0,+\infty)$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε :

- $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^4<x_2^4 \Rightarrow 4x_1^4<4x_2^4$ (1)
- $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow 8x_1^3<8x_2^3 \Rightarrow 8x_1^3-1<8x_2^3-1$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) παίρνουμε $q(x_1)<q(x_2)$ άρα η q γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,+\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι $q(\Delta)=\left[q(0),\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)\right)=[-1,+\infty)$, στο οποίο ανήκει το 0 άρα υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $q(x_0)=0$, το x_0 μοναδικό αφού η q γνησίως αύξουσα.

Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ σημείο της C_f και $B(\beta, h(\beta))$ σημείο της C_h, οι εξισώσεις των εφαπτομένων ευθειών στα σημεία αυτά είναι :

$$(\varepsilon_1): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{\alpha}$$

$$(\varepsilon_2): y - h(\beta) = h'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y + \beta^2 + 1 = -2\beta(x-\beta) \Leftrightarrow y = -2\beta x + \beta^2 - 1$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη θα πρέπει οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ να ταυτίζονται ,αυτό συμβαίνει μόνο όταν το σύστημα έχει λύση

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha^2} = -2\beta \\ \dfrac{2}{\alpha} = \beta^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2} = 2\beta \\ \dfrac{2}{\alpha} = \beta^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2\alpha^2} \\ \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1}{4\alpha^4} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2\alpha^2} \\ 8\alpha^3 = 1 - 4\alpha^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2\alpha^2} \\ 4\alpha^4 + 8\alpha^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Όμως $4\alpha^4 + 8\alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow q(\alpha) = q(x_0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = x_0$ μοναδική θετική ρίζα άρα $\beta = \dfrac{1}{2{x_0}^2}$.