ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 116, η πρώτη κουκίδα.

Α2. Σελίδα 128. Σχήμα και επιβεβαίωση αμέσως μετά το θεώρημα.

Α3.
α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό

Α4. Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

Έχουμε την πρόταση: Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Αν η f είναι σταθερή τότε το $f(\mathbb{R})$ είναι σύνολο με ένα μόνο στοιχείο (μονοσύνολο).

Αν δεν είναι σταθερή τότε το $f(\mathbb{R})$ είναι διάστημα.

Αλλά το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι σύνολο με ένα στοιχείο ούτε διάστημα, αλλά ένωση διαστημάτων.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει και αρκεί: $e^{x-1}-1>0$. Η τελευταία είναι διαδοχικά ισοδύναμη, $e^{x-1}>1 \Leftrightarrow e^{x-1}>e^0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Άρα, $A=(1,+\infty)$.

Για το σύνολο τιμών θεωρούμε την εξίσωση

$y=f(x) \Leftrightarrow y=\ln\left(e^{x-1}-1\right) \Leftrightarrow e^{x-1}-1=e^y \Leftrightarrow e^{x-1}=1+e^y \ (1)$

Επειδή $1+e^y>0$, η (1) έχει λύση για κάθε $y\in\mathbb{R}$,

$(1) \Leftrightarrow x-1=\ln(1+e^y) \Leftrightarrow x=\ln(1+e^y)+1 \ (2)$

Επειδή $x>1$ πρέπει $\ln(1+e^y)+1>1$ που ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα, $f(A)=\mathbb{R}$.

Σημείωση: το σύνολο τιμών θα μπορούσε να βρεθεί με τη βοήθεια της μονοτονίας και των αντιστοίχων ορίων.

Β2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\dfrac{1}{e^{x-1}-1}\left(e^{x-1}-1\right)'=\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}-1}>0, x\in A$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως και "$1-1$" συνεπώς αντιστρέφεται. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$f^{-1}(x)=\ln\left(1+e^x\right)+1, x\in\mathbb{R}.$

Σημείωση: Η ιδιότητα ότι η f είναι "$1-1$" θα μπορούσε να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού.

Β3. Έστω ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: $f^{-1}\left(\ln\left(e^{\rho-1}-1\right)\right)=\rho^2-\rho+1 \ (1)$.

Επειδή γνωρίζουμε ότι: $f^{-1}(f(x))=x, x\in A$,

$(1) \Rightarrow f^{-1}(f(\rho))=\rho^2-\rho+1 \Rightarrow \rho=\rho^2-\rho+1 \Rightarrow (\rho-1)^2=0 \Rightarrow \rho=1$, άτοπο διότι $1\notin A$.

Β4. $f^{-1}(x)=\ln\left(1+e^x\right)+1, x\in\mathbb{R}.$

Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, ως άθροισμα των συνεχών $\ln\left(1+e^x\right)$ (σύνθεση των συνεχών $\ln x, 1+e^x$) και 1(σταθερή).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ομοίως ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$\left(f^{-1}(x)\right)'=\left(\ln\left(1+e^x\right)+1\right)'=\dfrac{e^x}{1+e^x}, x\in(-1,1).$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1,1]$.
Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\left(f^{-1}\right)'(\xi)=\frac{f^{-1}(1)-f^{-1}(-1)}{1+1} \Leftrightarrow \frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}}=\frac{\ln(1+e)+1-\ln\left(1+e^{-1}\right)-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}}=\frac{\ln(1+e)-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}}=\frac{\ln e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2e^{\xi}=1+e^{\xi} \Leftrightarrow e^{\xi}=1 \Leftrightarrow \xi=0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x)=2x+2-2\ln x-2=2(x-\ln x)>0$, για κάθε $x>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\ln x \le x-1<x$. Το τελευταίο αποδεικνύεται και από τη μελέτη της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$. Προκύπτει επίσης άμεσα από τη θέση της γραφικής παράσταση της $y=x$ και $h(x)=\ln x$.

Επειδή $f(1)=0$, αν $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0$

αν $0<x<1$ είναι $f(x)<f(1)=0$

Γ2. **α.** $f(x)>2x-3 \Leftrightarrow x^2+2x-2x\ln x-3>2x-3$

$\Leftrightarrow x^2-2x\ln x>0 \Leftrightarrow x-2\ln x>0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(x)=x-2\ln x$, $x>0$

$$r'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}, x>0$$

Για $x<2$, είναι $r'(x)<0$ και άρα η r είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$

Για $x>2$, είναι $r'(x)>0$ και άρα η r είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$

Η συνεχής συνάρτηση r στο σημείο 2 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $r(2)=2-2\ln 2=2(\ln e-\ln 2)>0$ και άρα $r(x)>0$

β. Θεωρούμε το $D=[1,+\infty)$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(2x-3)=+\infty$, είναι και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Έτσι $f(D)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$ και επειδή το $2020\in f(D)$ προφανώς υπάρχει x_o και μάλιστα μοναδικός, αφού η f είναι "1−1", ώστε $f(x_o)=2020$

Γ3. Έστω το σημείο $M_o(x_o,f(x_o))$

Η εφαπτόμενη της C_f στο M_o είναι η ευθεία $(\varepsilon): y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$

Επειδή θέλουμε να διέρχεται από το σημείο $A(0,-2)$ πρέπει και αρκεί

$-2-f(x_o)=-x_of'(x_o) \Leftrightarrow -2-\left(x_o^2+2x_o-2x_o\ln x_o-3\right)=-x_o\left(2x_o-2\ln x_o\right) \Leftrightarrow$

$x_o^2-2x_o+1=0 \Leftrightarrow (x_o-1)^2=0 \Leftrightarrow x_o=1$

Οπότε, πρόκειται για την εφαπτομένη $(\varepsilon): y=2x-2$ στο σημείο $M_o(1,0)$

Γ4. Επειδή στο $(1,+\infty)$ είναι $f(x)>0$ και στο $(0,1)$ είναι $f(x)<0$ τελικά είναι $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Άρα και $F(x)\neq 0$ διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$

Αφού αναζητούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις F που ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση αυτές θα είναι κατ΄ανάγκη και συνεχείς. Ως συνεχής, η F διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από αυτά.

Από $F^2(x)=f^2(x)$ στο $(0,1)$ είναι ή $F(x)=-f(x)$ ή $F(x)=f(x)$

και στο $(1,+\infty)$ είναι ή $F(x)=-f(x)$ ή $F(x)=f(x)$

Οπότε

ή $F_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν} \quad 0<x<1 \\ f(x) & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases}=f(x)$ ή $F_2(x)=\begin{cases} -f(x) & \text{αν} \quad 0<x<1 \\ -f(x) & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases}=-f(x)$

ή $F_3(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν} \quad 0<x<1 \\ -f(x) & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases}$ ή $F_4(x)=\begin{cases} -f(x) & \text{αν} \quad 0<x<1 \\ f(x) & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases}$

Οι F_1 και F_2 είναι παραγωγίσιμες.

Όμως, η συνάτηση F_3 στο 1 δεν είναι παραγωγίσιμη

αφού $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{F_3(x)-F_3(1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=f'(1)=2$

και $\lim\limits_{x\to1+}\left(\dfrac{F_3(x)-F_3(1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{-f(x)}{x-1}\right)=-\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=-f'(1)=-2$

Εντελώς όμοια καταλήγουμε ότι και η F_4 στο 1 δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οπότε, υπάρχουν ακριβώς δύο παραγωγίσιμες στο Δ συναρτήσεις F οι οποίες μάλιστα είναι και αντίθετες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Α΄ τρόπος

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και για x=0 όπου χρειαστεί, έχουμε:

$$f''(x)-f(x)=2e^x \Rightarrow f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)=2e^x \Rightarrow (f'(x)+f(x))'-(f'(x)+f(x))=2e^x \Rightarrow$$

$$e^{-x}(f'(x)+f(x))'-e^{-x}(f'(x)+f(x))=e^{-x}2e^x \Rightarrow e^{-x}(f'(x)+f(x))'+(e^{-x})'(f'(x)+f(x))=2 \Rightarrow$$

$$\left(e^{-x}(f'(x)+f(x))\right)'=(2x)' \Rightarrow e^{-x}(f'(x)+f(x))=2x+c,$$

για x=0 είναι $e^{-0}(f'(0)+f(0))=2\cdot 0+c \Rightarrow 1(2-1)=c \Rightarrow c=1.$

Άρα $e^{-x}(f'(x)+f(x))=2x+1 \Rightarrow e^{2x}e^{-x}(f'(x)+f(x))=e^{2x}(2x+1) \Rightarrow e^x(f'(x)+f(x))=2xe^{2x}+e^{2x} \Rightarrow$

$$e^x f'(x)+(e^x)'f(x)=x(e^{2x})'+x'e^{2x} \Rightarrow \left(e^x f(x)\right)'=\left(xe^{2x}\right)' \Rightarrow e^x f(x)=xe^{2x}+c_1$$

για x=0 είναι $e^0 f(0)=0\cdot e^{2\cdot 0}+c_1 \Rightarrow 1(-1)=c_1 \Rightarrow c_1=-1$

Άρα $e^x f(x)=xe^{2x}-1 \Rightarrow e^{-x}e^x f(x)=e^{-x}(xe^{2x}-1) \Rightarrow f(x)=xe^x-e^{-x}$

Β΄ τρόπος

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και για x=0 όπου χρειαστεί, έχουμε:

$$f''(x)-f(x)=2e^x \Rightarrow f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)=2e^x \Rightarrow e^x f''(x)+e^x f'(x)-e^x f'(x)-e^x f(x)=2e^{2x} \Rightarrow$$

$$\left(e^x f''(x)+(e^x)'f'(x)\right)-\left(e^x f'(x)+(e^x)'f(x)\right)=2e^{2x} \Rightarrow \left(e^x f'(x)\right)'-\left(e^x f(x)\right)'=(e^{2x})' \Rightarrow$$

$$\left(e^x f'(x)-e^x f(x)\right)'=(e^{2x})' \Rightarrow e^x f'(x)-e^x f(x)=e^{2x}+c$$

Για x=0 είναι $e^0 f'(0)-e^0 f(0)=e^{2\cdot 0}+c \Rightarrow 1\cdot 2-1\cdot(-1)=1+c \Rightarrow c=2$

Άρα $e^x f'(x)-(e^x)'f(x)=e^{2x}+2 \Rightarrow \dfrac{e^x f'(x)-(e^x)'f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{e^{2x}+2}{e^{2x}} \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=1+2e^{-2x}=(x-e^{-2x})' \Rightarrow$

$\dfrac{f(x)}{e^x}=x-e^{-2x}+c_1.$ *Για x=0 είναι* $\dfrac{f(0)}{e^0}=0-e^{-2\cdot 0}+c_1 \Rightarrow -1=-1+c_1 \Rightarrow c_1=0.$

Έτσι έχουμε $\dfrac{f(x)}{e^x}=x-e^{-2x} \Rightarrow e^x\dfrac{f(x)}{e^x}=e^x(x-e^{-2x}) \Rightarrow f(x)=xe^x-e^{-x}$

Δ2.

Έχουμε $f(x)=xe^x-e^{-x}$ *και* $f'(x)=e^x+xe^x+e^{-x}=(x+1)e^x+e^{-x}=(x+1)e^x+\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{(x+1)e^{2x}+1}{e^x}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)= $(x+1)e^{2x}+1$,η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων, με $h'(x)=e^{2x}+2e^{2x}(x+1)=(2x+3)e^{2x}$. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η συμπεριφορά της συνάρτησης h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

x	$-\infty$ $\quad -\frac{3}{2} \quad$ $+\infty$
h΄	– 0 +
h	↘ ολ. ελ. ↗

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x=$-\frac{3}{2}$ την τιμή

$$h\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}+1\right)e^{2\left(-\frac{3}{2}\right)}+1= -\frac{1}{2e^3}+1=\frac{2e^3-1}{2e^3}>0.$$

Επομένως h(x)>0 για κάθε x$\in\mathbb{R}$, οπότε $\frac{h(x)}{e^x}>0$ ή $f'(x)>0$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως 1-1 στο $\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη σε αυτό. Επομένως είναι συνεχής και στο [0,1].

Επίσης έχουμε f(0)f(1)=$-1\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{1-e^2}{e}<0$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano
για την συνάρτηση f στο [0,1], επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας $\rho\in(0,1)$ τέτοιος ώστε f(ρ)=0.
Έτσι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) άρα και στο $\mathbb{R}$ η οποία είναι και η μοναδική αφού η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Δ3.
Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων , με
$g'(x)=e^x+(x-1)e^x-e^{-x}=xe^x-e^{-x}=f(x)$. Από το Δ2, γνωρίζουμε ότι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με μοναδική ρίζα ρ μεταξύ 0 και 1.

Έχουμε για κάθε x_1,x_2 με $x_1<\rho<x_2 \overset{f\ \gamma.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(x_1)<f(\rho)<f(x_2)\Rightarrow f(x_1)<0<f(x_2)$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μελέτης της συνάρτησης g:

x	$-\infty$ $+\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ ρ $\quad$ 1
g΄=f	– 0 +
g	↘ ολ.ελ ↗

Στο διάστημα $(-\infty,\rho]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1. Συνεπώς η προφανής ρίζα x=0 είναι η μοναδική στο διάστημα αυτό.

Επίσης έχουμε 0<ρ $\overset{g\ \gamma.\varphi\theta}{\Rightarrow}$ g(ρ)<g(0)$\Rightarrow$ g(ρ)<0 (1).
Παρατηρούμε επίσης ότι g(1)=e^{-1} >0 (2).

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη σε αυτό. Επομένως είναι συνεχής και στο [ρ,1].Επίσης, από (1),(2) είναι g(ρ) g(1)<0. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την συνάρτηση g στο [ρ,1], επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\rho,1)$ τέτοιος ώστε g(x_0)=0.

Έτσι η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ,1) άρα και στο $(\rho,+\infty)$ η οποία είναι και η μοναδική αφού η g είναι 1-1 στο $[\rho,+\infty)$, ως γνησίως αύξουσα σε αυτό. Τελικά λοιπόν η εξίσωση g(x)=0, εκτός της προφανούς ρίζας x=0, έχει ακριβώς μία ακόμα τη x=x_0.

Δ4.

Α΄ τρόπος

Αφού το σημείο Μ κινείται επί της καμπύλης της y=g(x) δηλαδή επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, η τεταγμένη του y συναρτήσει του χρόνου t για $t \geq 0$ sec δίνεται από τη σχέση

y(t)=g(x(t))$\Rightarrow y'(t)=g'(x(t))\,x'(t)$, $t \geq 0$ (1) .

Αν είναι $t_0 \geq 0$ η ζητούμενη χρονική στιγμή τότε θα πρέπει $y'(t_0)=-2$ *μον/sec*

Η (1) για t=t_0 γίνεται $y'(t_0)=g'(x(t_0))\,x'(t_0)$ και αφού x΄(t)=2 μον/sec για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$-2\ \mu o\nu/sec = g'(x(t_0))\,2\ \text{μον/sec} \Rightarrow g'(x(t_0))=-1 \overset{\Delta 3}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x(t_0))=-1 \;\Rightarrow f(x(t_0))=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Rightarrow} x(t_0)=0$$

. Επομένως το ζητούμενο θα συμβεί όταν το Μ φθάσει στη θέση με τετμημένη 0. Αφού ξεκινά από τη θέση με τετμημένη -2 και η τετμημένη έχει ρυθμό μεταβολής 2 μον/sec, θα φτάσει στη θέση που πρέπει σε 1 sec από την έναρξη της κίνησης, δηλαδή $t_0=1\ sec$.

Με χρήση του συμβολισμού Leibniz:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \text{ και για t=} t_0 \text{ είναι } \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0=x(t_0)}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Β΄ τρόπος

$x'(t)=2=(2t)' \Rightarrow x(t)=2t+c$ και αφού $x(0)=-2 \Rightarrow c=-2$. Επομένως είναι $x(t)=2t-2,\ t \geq 0$

Τότε είναι $y(t)=g(x(t))=(2t-3)e^{(2t-2)}+e^{-(2t-2)}$

$$\Rightarrow y'(t)=...=2\left(e^{2t-2}(2t-2)-e^{-(2t-2)}\right) \Rightarrow y'(t)=2f(2t-2)$$

Τη χρονική στιγμή t =t_0 είναι $y'(t_0)=2f(2t_0-2)=-2$

$$\Rightarrow 2f(2t_0-2)=2f(0) \Rightarrow f(2t_0-2)=f(0) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} 2t_0-2=0 \Rightarrow t_0=1\text{sec}.$$