

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Γ(α)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
/ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 22 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα: 30.

A2. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα: 16.

A3. Σχολικό Βιβλίο Σελίδα: 142.

- A4.** α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}, x > 0$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}, x > 0$$

B2. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2} = \frac{1+1}{1} = 2$

B3. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$			

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση 1 ίσο με $f(1) = 2$.

B4. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)' = \frac{(x^2 - 1)' \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Επομένως,

$$\frac{f'(x)}{x} + \frac{f''(x)}{2} + x = \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{x} + \frac{\frac{2}{x^3}}{2} + x = \frac{x^2 - 1}{x^3} + \frac{1}{x^3} + x = \frac{x^2 - 1 + 1}{x^3} + x = \frac{x^2}{x^3} + x = \frac{1}{x} + x = \frac{x^2 + 1}{x} = f(x)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι, $\bar{x}_A = \frac{-3 - 5 + 3 + 1 - 3 - 5}{6} = \frac{-12}{6} = -2$

Για να βρούμε τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά

$$-5, -5, -3, -3, 1, 3$$

Επειδή έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων, η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων δηλαδή της 3^{ης} και της 4^{ης} παρατήρησης άρα,

$$\delta_A = \frac{-3 - 3}{2} = -3$$

Το εύρος βρίσκεται αφαιρώντας τη μικρότερη από τη μεγαλύτερη παρατήρηση. Δηλαδή,

$$R_A = 3 - (-5) = 8$$

Γ2. Αφού είναι $f_1 = 0,4$ και το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$ παίκτες τότε

$$f_1 = \frac{v_1}{n} \Leftrightarrow v_1 = f_1 \cdot n = 0,4 \cdot 20 = 8$$

Επίσης είναι $v_2 = \frac{3}{4} \cdot R_A = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ και $v_3 = \bar{x}_A^2 = (-2)^2 = 4$.

Το άθροισμα των συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος του δείγματος Α άρα:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 \Leftrightarrow v_4 = 20 - 8 - 6 - 4 = 2$$

Επομένως ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής,

Βαθμοί x_i	Πλήθος παικτών v_i	Σχετική συχνότητα f_i
2	8	0,4
4	6	0,3
6	4	0,2
8	2	0,1
Σύνολο	20	1

Γ3. i) Η μέση τιμή υπολογίζεται από τον τύπο $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i$.

Για το άθροισμα $\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα,

Βαθμοί x_i	Πλήθος παικτών v_i	$x_i \cdot v_i$
2	8	16
4	6	24
6	4	24
8	2	16
Σύνολο	20	$\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = 80$

$$\text{Άρα } \bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = \frac{80}{20} = 4$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Γ(α)

- ii) Για τον υπολογισμό της διαμέσου του άρτιου δείγματος B βρίσκουμε τις αθροιστικές συχνότητες N_i

Βαθμοί x_i	Πλήθος παικτών v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i
2	8	8
4	6	14
6	4	18
8	2	20
Σύνολο	20	

Αφού το πλήθος είναι άρτιο, είναι $\delta_B = \frac{t_{10} + t_{11}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$

- iii) Με τη βοήθεια του πίνακα

Βαθμοί x_i	Πλήθος παικτών v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
2	8	-2	4	32
4	6	0	0	0
6	4	2	4	16
8	2	4	16	32
Σύνολο	20			80

βρίσκουμε ότι η διακύμανση ισούται με, $s_B^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{80}{20} = 4$

Επομένως η τυπική απόκλιση του δείγματος B ισούται με τη θετική ρίζα της διακύμανσης, δηλαδή είναι $s_B = 2$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος B ισούται με,

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Άρα $CV_B = 50\% > 10\%$ που σημαίνει πως το δείγμα B δεν είναι ομοιογενές.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Γ(α)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$P(B) = 2P(A) \quad (2)$$

και

$$P(A - B) = \frac{P(A \cap B)}{2}$$

Η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned} P(A - B) &= \frac{P(A \cap B)}{2} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{2} \\ &\Leftrightarrow 2P(A) = 3P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) \quad (3) \end{aligned}$$

Από τον προσθετικό νόμο με τη βοήθεια των (1) (2) και (3) προκύπτει,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &\stackrel{(1),(2),(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} = P(A) + 2P(A) - \frac{2}{3}P(A) \\ &\Leftrightarrow 3 = 14P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

άρα

$$(2) \Leftrightarrow P(B) = 2P(A) = 2 \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{7}$$

Δ2. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων $(A \cup B)'$ και $B \cap A'$ έχουμε:

$$\text{i)} \quad P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow P[(A \cup B)'] = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \quad P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - \frac{2}{3}P(A) = \frac{3}{7} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{14} = \frac{2}{7}$$

iii) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A \cap B)'$

Άρα η πιθανότητα του ισούται με:

$$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Γ(α)

Δ3. Είναι $P(A) = \frac{3}{14}$, $P(B) = \frac{3}{7} = \frac{6}{14}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2} = \frac{7}{14}$

Είναι:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &< P(A) < P(B) < P(A \cup B) \\ \Leftrightarrow \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} &< \frac{N(A)}{N(\Omega)} < \frac{N(B)}{N(\Omega)} < \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} \\ \Leftrightarrow N(A \cap B) &< N(A) < N(B) < N(A \cup B) \end{aligned}$$

και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει ότι:

$$f(N(A \cap B)) > f(N(A)) > f(N(B)) > f(N(A \cup B))$$