

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε η f λέγεται 1-1 συνάρτηση;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(ii) Κάθε συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα όπου οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(iii) Ισχύει $(x^{-v})' = -vx^{v-1}$ για κάθε $v \in \mathbb{N}$

(iv) Κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη στο A .

(v) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| > |x|$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x+6}{x-2}, x \neq 2$ και $g(x) = 1 - \frac{2}{2e^x+1}, x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 8**
- B2.** Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} . **Μονάδες 5**
- B3.** Να ορίσετε τη παράσταση $f \circ f$. **Μονάδες 6**
- B4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < \beta$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = \frac{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)}{3}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $(x-2) \cdot f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάποια $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(2) - 25)x^3 + f(2)x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = 5$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 5}{h} = 9$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι: $f(2) = 5$ και $f'(2) = 3$. **Μονάδες 6**
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$. **Μονάδες 5**
- Γ3. (i)** Για $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$ να βρείτε το τύπο της f . **Μονάδες 2**
- (ii)** Αν $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g με

$$g(x) = \ln(x+1) + 2x - 1, x \in (-1, +\infty)$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x + 1 - e^{-2x}$ με $x \in (-1, +\infty)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα μόνο σημείο του άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών $g(A) = (0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\alpha e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + \alpha$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και α κάποιος πραγματικός αριθμός
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 6

Αν $\alpha = 1$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την αντιστροφή της.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = e$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g^{-1} έχει μια τουλάχιστον εφαπτόμενη η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

Μονάδες 6