ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 263.

Α2. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 280.

Α3. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 303.

Α4. $\alpha \to \Lambda$. Το σωστό είναι: $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$. Βλέπε σελίδα 171 σχολικού βιβλίου.

$\beta \to \Sigma$. Βλέπε σελίδα 217 σχολικού βιβλίου.

$\gamma \to \Sigma$. Βλέπε σελίδα 330 σχολικού βιβλίου.

$\delta \to \Sigma$. Βλέπε σελίδα 192 σχολικού βιβλίου.

$\varepsilon \to \Lambda$. Το σωστό είναι: τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. Βλέπε σελίδα 261 σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, καθώς η f για κάθε $x \neq 1$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

1ος τρόπος

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{u} = 1 = f(1)$.
Θέτοντας $u = x-1$ ισχύει αν $x \to 1$ τότε $u \to 0$ και έτσι το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to 1} = \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{u} = 1$ το οποίο είναι η παράγωγος της συνάρτησης $h(x) = e^x$, για $x = 0$.

Άρα $h'(x) = e^x$, οπότε $\lim\limits_{x\to u}\dfrac{e^{u}-1}{u} = h'(0) = 1$.

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}\ DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} e^{x-1}\cdot(x-1)' = \lim_{x\to 1} e^{x-1} = e^0 = 1 = f(1).$$

Β2. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}-1}{x-1} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1-x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}\ DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x-1}-x\right)'}{\left((x-1)^2\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$,με $f'(1)=\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$, δηλαδή $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ οπότε $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Β3. Η συνάρτηση $g(x)=(x-2)e^{x-1}+1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, με $g'(x)=e^{x-1}+(x-2)\cdot e^{x-1}=e^{x-1}(1+x-2)=e^{x-1}\cdot(x-1)$.

Έχουμε: $g'(x)\geq 0$, οπότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$e^{x-1}(x-1)\geq 0 \overset{e^{x-1}>0}{\Leftrightarrow} x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Ομοίως αν $g'(x)<0$ προκύπτει $x<1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Επειδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=(1-2)\cdot e^{1-1}+1=-1+1=0$, ισχύει $g(x)\geq g(1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή ισχύει $g(x)\geq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)-(e^{x-1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{xe^{x-1}-e^{x-1}-e^{x-1}+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{xe^{x-1}-2e^{x-1}+1}{(x-1)^2}=\frac{(x-2)e^{x-1}+1}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\neq 1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β4. Ισχύει ότι:

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[2015, 2016]$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [2015, 2016]$, καθώς η συνάρτηση g μηδενίζεται μόνο στο $x = 1$.

Οπότε από γνωστό Θεώρημα έχουμε: $\int_{2015}^{2016} g(x)dx > 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \geq 0. \ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$g(0) = f(0) - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.
Επίσης το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = \left(f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \right)' = f'(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Γ2. **<u>1ος τρόπος</u>**

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+f'(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot f''(x)+f'(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'+f(x)\cdot f'(x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'+e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$e^x\left(f(x)\cdot f'(x)\right)'+\left(e^x\right)'\cdot f(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)\right)'=0$$

<u>2ος τρόπος</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+f'(x)\cdot f'(x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)\cdot f''(x)+e^x\cdot f'(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\right)'\cdot f(x)\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)\cdot\left(f'(x)\right)'+e^x\cdot f'(x)\cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)\right)'=0$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$e^x\cdot f(x)\cdot f'(x)=c_1.$$

Για $x=0$, έχουμε:

$$e^0\cdot f(0)\cdot f'(0)=c_1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=c_1 \Leftrightarrow c_1=-1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$e^x \cdot f(x)\cdot f'(x) = -1 \Leftrightarrow f(x)\cdot f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$2\cdot f(x)\cdot f'(x) = -2e^{-x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(2e^{-x}\right)'.$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + c_2.$$

Για $x=0$, έχουμε:

$$f^2(0) = 2e^0 + c_2 \Leftrightarrow 3 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + 1 \neq 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Επειδή $f(0)=\sqrt{3}>0$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως:

$$f(x) = \sqrt{2e^{-x}+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Γ3. **<u>1ος τρόπος</u>**

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.
Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2e^{-x_1}+1} = \sqrt{2e^{-x_2}+1} \Leftrightarrow$$

$$2e^{-x_1}+1 = 2e^{-x_2}+1 \Leftrightarrow 2e^{-x_1} = 2e^{-x_2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x_1} = e^{-x_2} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1 συνάρτηση, οπότε αντιστρέφεται.

<u>2ος τρόπος</u>

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{2e^{-x}+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2e^{-x}+1}}\left(2e^{-x}+1\right)' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{2e^{-x}+1}} < 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1 συνάρτηση, συνεπώς αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2e^{-x}+1}$ (1)

Θα πρέπει $y \geq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$y^2 = 2e^{-x}+1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y^2-1}{2} \quad (2)$$

Θα πρέπει $\frac{y^2-1}{2} > 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 > 0 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y > 1$.

Με αυτόν τον επιπλέον περιορισμό έχουμε:

$$\ln e^{-x} = \ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \ln\left(\frac{y^2-1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{y^2-1}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{2}{y^2-1}\right), \text{ y>1}$$

Άρα είναι:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2-1}\right), \ x > 1.$$

Υποσημείωση: Το σύνολο τιμών της f,το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, μπορεί να βρεθεί από την συνέχεια και την μονοτονία της f.

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{f^2(x)}dx$.

Έχουμε:

$$\mathrm{I} = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{f^2(x)}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{2e^{-x}+1}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{\frac{2}{e^x}+1}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x+1}{\frac{2+e^x}{e^x}}dx = \int_{\ln(e-2)}^{0} \frac{e^x\left(e^x+1\right)}{e^x+2}dx$$

Θέτουμε $e^x = u$, οπότε $e^x dx = du$.

Επίσης $e^x + 1 = u + 1 > 0$ και $e^x + 2 = u + 2 > 0$.

Για $x = \ln(e-2)$ είναι $u = e^{\ln(e-2)} = e - 2$.

Για $x = 0$ είναι $u = e^0 = 1$.

Επομένως:

$$\mathrm{I} = \int_{e-2}^{1} \frac{u+1}{u+2}du = \int_{e-2}^{1} \frac{u+2-1}{u+2}du = \int_{e-2}^{1}\left(1 - \frac{1}{u+2}\right)du =$$

$$= \left[u\right]_{e-2}^{1} - \left[\ln\left(u+2\right)\right]_{e-2}^{1} = 1 - (e-2) - \left(\ln 3 - \ln(e-2+2)\right) =$$

$$= 1 - e + 2 - \ln 3 + \ln e = 4 - e - \ln 3.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$, ή ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Η συνάρτηση $g(x)=\ln x + x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με:

$g'(x)=(\ln x + x)' = \dfrac{1}{x}+x>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

1ος τρόπος

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$ και επειδή είναι συνεχής στο $(0,1)$, έχουμε:

$g((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)\right)=(-\infty,1)$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x + x)=1$

Επειδή $0 \in g((0,1))$ η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ και αφού η είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό η ρίζα θα είναι μοναδική.

2ος τρόπος

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + x)=-\infty$.

Οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ με $0<\alpha<1$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha)<0$.

Επίσης $g(1)=\ln 1+1=1>0$.

Επομένως $g(\alpha)\cdot g(1)<0$.

Επειδή η g είναι και συνεχής στο $[\alpha,1]\subseteq(0,1)$ σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η συνάρτηση g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,1)\subseteq(0,1)$.

Επιπλέον η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

3ος τρόπος

Ενδεικτικά, εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την g στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$.

Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση $e^{x-x_0}=\frac{x_0}{x}$.

Επειδή $x_0>0$ θα πρέπει και $x>0$, οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$e^{x-x_0}=\frac{x_0}{x}\Leftrightarrow \ln e^{x-x_0}=\ln\frac{x_0}{x}\Leftrightarrow x-x_0=\ln x_0-\ln x\Leftrightarrow$$

$$x+\ln x=x_0+\ln x_0\Leftrightarrow g(x)=g(x_0).\ (1)$$

Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, οπότε έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow g(x)=g(x_0)\overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} x=x_0.$$

Δ2. **i)** Για $0<\alpha<1$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\int_\alpha^1\left|g(x)-x\right|dx.$$

Έχουμε:

$$x\le 1\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln x\le\ln 1\Leftrightarrow \ln x\le 0\Leftrightarrow \ln x+x\le x\Leftrightarrow g(x)\le x\Leftrightarrow g(x)-x\le 0.$$

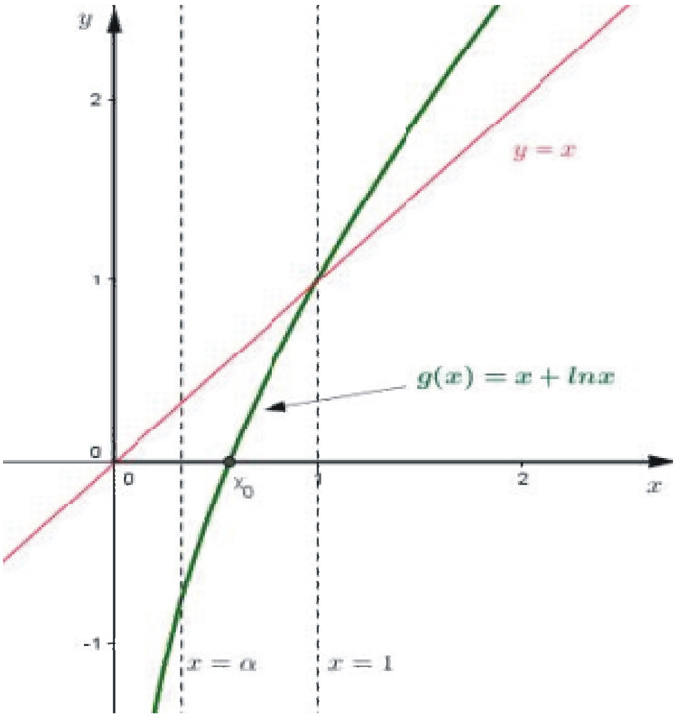
Συνεπώς στο $[\alpha,1]$ είναι $\left|g(x)-x\right|=x-g(x)$.

Επομένως είναι:

$$\mathrm{E}=\int_\alpha^1(x-g(x))dx=\int_\alpha^1(x-\ln x-x)dx=\int_\alpha^1(-\ln x)dx=\int_1^a\ln x dx=$$

$$=\int_1^a(x)'\ln x dx=[x\ln x]_1^a-\int_1^a x(\ln x)'dx=a\ln a-\int_1^a x\frac{1}{x}dx=$$

$$=a\ln a-\int_1^a 1dx=a\ln a-[x]_1^a=a\ln a-a+1 \text{ τ.μ.}$$



ii) Από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha'(t) = 1$ cm/sec.

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του αριθμού α αυξάνει, δηλαδή κινείται απομακρυνόμενος από το 0 και προσεγγίζοντας το 1, αφού $0 < \alpha < 1$.

Επειδή η θέση του αριθμού α είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$\mathrm{E}(t) = \alpha(t)\cdot \ln\big(\alpha(t)\big) - \alpha(t) + 1$.

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$E'(t) = a'(t)\cdot \ln(a(t)) + a(t)\cdot(\ln(a(t))' - a'(t) =$$
$$= a'(t)\cdot \ln(a(t)) + a(t)\cdot \frac{a'(t)}{a(t)} - a'(t) =$$
$$= a'(t)\cdot \ln(a(t)) + a'(t) - a'(t) = a'(t)\cdot \ln(a(t)).$$

Την χρονική στιγμή t_0 στην οποία είναι $\alpha(t_0) = x_0$ έχουμε:

$\mathrm{E}'(t_0) = \alpha'(t_0)\cdot \ln\big(\alpha(t_0)\big) = 1\cdot \ln x_0 = \ln x_0$.

Όμως από Δ1. ερώτημα ισχύει ότι:

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$.

Συνεπώς $\mathrm{E}'(t_0) = -x_0$ cm²/sec.

Δ3. Από υπόθεση για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+e^{x}\left(x-1\right)+\ln x.$$

Επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^{+}}\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)=\lim_{x\to 0^{+}}\left(f\left(x\right)+e^{x}\left(x-1\right)+\ln x\right).$$

- Για το $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)$

  Στο ερώτημα Δ1. δείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)=-\infty$.

  Θέτοντας $u=g(x)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^{+}} u=-\infty$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)=\lim\limits_{u\to -\infty} f(u)$ που είναι και το ζητούμενο.

- Για το $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(f\left(x\right)+e^{x}\left(x-1\right)+\ln x\right)$.

  Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό. Συνεπώς:

  $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=f(0)$ (1).

  Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^{+}} e^{x}=e^{0}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(x-1\right)=0-1=-1$.

  Άρα:

  $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(e^{x}\left(\chi-1\right)\right)=-1$. (2)

  Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln x=-\infty$. (3)

  Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

  $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(f\left(x\right)+e^{x}\left(x-1\right)+\ln x\right)=f(0)-1+\left(-\infty\right)=-\infty$.

  Έτσι έχουμε:

  $\lim\limits_{u\to -\infty} f(u)=-\infty$ ή $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.

Δ4. Για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+e^{x}\left(x-1\right)+\ln x \Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=xe^{x}-e^{x}+\ln x \Leftrightarrow$$

$$f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=e^{\ln x}e^{x}-e^{x}+\ln x \Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=e^{\ln x+x}-e^{x}+\ln x \Leftrightarrow$$

$f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=e^{g(x)}-e^{x}+\ln x$.

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με τον όρο $g(x)-x=\ln x>0$, για κάθε $x>1$ και έχουμε:

$$\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)}{g(x)-x}=\frac{e^{g(x)}-e^{x}}{g(x)-x}+\frac{\ln x}{g(x)-x}\Leftrightarrow$$
$$\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)}{g(x)-x}=\frac{e^{g(x)}-e^{x}}{g(x)-x}+\frac{\ln x}{\ln x}\Leftrightarrow$$
$$\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)}{g(x)-x}=\frac{e^{g(x)}-e^{x}}{g(x)-x}+1. \text{ (1)}$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής στο $\left[x,g(x)\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x,g(x)\right)$, για κάθε $x>1$.
  Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $\left[x,g(x)\right]$, επομένως θα υπάρχει $\xi_1\in\left(x,g(x)\right)$ με $1<x<\xi_1<g(x)$ τέτοιο, ώστε:

  $$f'\left(\xi_1\right)=\frac{f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)}{g(x)-x}. \text{ (2)}$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής στο $\left[x,g(x)\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x,g(x)\right)$, για κάθε $x>1$, με $h'(x)=e^{x}$.
  Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την h στο $\left[x,g(x)\right]$, επομένως θα υπάρχει $\xi_2\in\left(x,g(x)\right)$ με $1<x<\xi_2<g(x)$ τέτοιο, ώστε:

  $$h'\left(\xi_2\right)=e^{\xi_2}=\frac{e^{g(x)}-e^{x}}{g(x)-x}. \text{ (3)}$$

  Από τις (2) και (3) η (1) δίνει: $f'\left(\xi_1\right)=e^{\xi_2}+1$, με $\xi_1>1$ και $\xi_2>1$.

Ενδεικτικά ένας 2ος τρόπος είναι:

Για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+e^{x}\left(x-1\right)+\ln x\Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=xe^{x}-e^{x}+\ln x\Leftrightarrow$$

$$f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=e^{\ln x}e^{x}-e^{x}+\ln x\Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=e^{\ln x+x}-e^{x}+\ln x\Leftrightarrow$$

$f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(x\right)=e^{g(x)}-e^{x}+\ln x$.

Οπότε: $f\left(g\left(x\right)\right)-e^{g(x)}-g\left(x\right)=f\left(x\right)-e^{x}-x$.(1)

Έστω η συνάρτηση $y\left(x\right)=f\left(x\right)-e^{x}-x, x>0$.

Τότε η (1) γίνεται: $y\left(g\left(x\right)\right)=y\left(x\right)$, για κάθε $x>0$. (2)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση y στο $\left[x,g\left(x\right)\right]$

για κάθε $x>1$.

Η y είναι συνεχής στο $\left[x,g\left(x\right)\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x,g\left(x\right)\right)$ για κάθε $x>1$, ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στα διαστήματα αυτά.

Λόγω της (2) ισχύει $y\left(g\left(x\right)\right)=y\left(x\right)$.

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in\left(x,g\left(x\right)\right)$, άρα και $\xi>1$, τέτοιος ώστε $y'\left(\xi\right)=0$.

Όμως $y'\left(x\right)=f'\left(x\right)-e^{x}-1$, οπότε $f'\left(\xi\right)-e^{\xi}-1=0$.

Οπότε έχουμε $f'\left(\xi\right)=e^{\xi}+1, \xi>1$.

Για $\xi_1=\xi_2=\xi$ έπεται το ζητούμενο.