

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 4 Μαΐου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 93.

A3. Σχολικό βιβλίο σελ 22.

- A4.** α) Σωστό.
β) Σωστό.
γ) Σωστό.
δ) Λάθος.
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-2, f(-2))$ είναι το $f'(-2)$, άρα λόγω της υπόθεσης ισχύει:

$$f'(-2) = 36 \quad (1)$$

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = (ax^3 - 9x^2 - 24x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3ax^2 - 18x - 24$$

Επομένως λόγω της (1) έχουμε:

$$3 \cdot a \cdot (-2)^2 - 18 \cdot (-2) - 24 = 36 \Leftrightarrow 12a + 36 - 24 = 36 \\ \Leftrightarrow 12a = 24 \Leftrightarrow a = 2$$

Για $a = 2$ έχουμε

$$f(x) = 2x^3 - 18x - 24,$$

οπότε:

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 18(-2) - 24 = 2 \cdot (-8) + 36 - 24 = -16 + 36 - 24 = -4.$$

Άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(-2, -4)$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(-2, -4)$.

Ισχύει:

$$\lambda = f'(-2) = 36$$

και το σημείο $A(-2, -4)$ ανήκει στην $y = \lambda x + \beta$ επομένως:

$$-4 = 36 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 68$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y = 36x + 68$$

B2. Βρίσκουμε την παράγωγο της f .

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού επομένως:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Άρα έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = \frac{3+5}{2} \\ \text{ή} \\ x = \frac{3-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' καθώς επίσης και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$				

Επομένως στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[4, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο διάστημα $[-1, 4]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -8$.

Για $x = 4$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(4) = 130$.

B3. Το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x^2 - 18x - 24}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6(x^2 - 3x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6(x+1)(x-4)(\sqrt{x} + 2)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} 6(x+1)(\sqrt{x} + 2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα ενδεχόμενα που ορίστηκαν είναι τα εξής

Π: Ο κάτοικος παρακολουθεί τους αγώνες της ομάδας ποδοσφαίρου.

Μ: Ο κάτοικος παρακολουθεί τους αγώνες της ομάδας μπάσκετ.

Από τα δεδομένα προκύπτουν οι παρακάτω πιθανότητες των ενδεχομένων:

$$P(\Pi \cup M)' = 0,35 \quad (1)$$

και

$$P(M - \Pi) = 0,4 \Leftrightarrow P(M) - P(M \cap \Pi) = 0,4 \quad (2)$$

Ισχύει:

$$P(\Pi \cup M) = 1 - P(M \cup \Pi)' \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} P(M \cup \Pi) = 1 - 0,35 \Leftrightarrow P(\Pi \cup M) = 0,65$$

Εφαρμόζοντας τον προσθετικό νόμο για τα Π, Μ έχουμε:

$$P(\Pi \cup M) = P(\Pi) + P(M) - P(M \cap \Pi) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0,65 = P(\Pi) + 0,40 \Leftrightarrow P(\Pi) = 0,25$$

Γ2. (i) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A: Το άτομο είναι άντρας

(επομένως το ενδεχόμενο A' σημαίνει ότι το άτομο είναι γυναίκα)

Δ: Το άτομο έχει διαρκείας

Ισχύει:

$$N(\Delta) = 50 \Leftrightarrow 0,5N(A) + 0,5N(A') = 50 \Leftrightarrow N(A) + N(A') = 100 \quad (3)$$

Οπότε

$$N(\Pi) = N(A) + N(A') \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} N(\Pi) = 100$$

Άρα την ομάδα ποδοσφαίρου την παρακολουθούν συνολικά 100 άτομα.

(ii) Ζητάμε τη πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap \Delta' = A - \Delta$

$$P(A - \Delta) = P(A) - P(A \cap \Delta) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap \Delta)^{(*)}}{N(\Omega)} = \frac{70}{100} - \frac{35}{100} = \frac{35}{100} = 0,35$$

(*) Όμως

$$N(A') = N(A) - 40 \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) προκύπτει:

$$N(A) + (N(A) - 40) = 100 \Leftrightarrow 2N(A) = 140 \Leftrightarrow N(A) = 70$$

Οπότε:

$$N(A') = N(A) - 40 \Leftrightarrow N(A') = 30$$

$$N(A \cap \Delta) = 0,5 \cdot N(A) = 0,5 \cdot 70 = 35$$

Γ3. Έστω $\bar{x}$ ο μέσος όρος των αγώνων ποδοσφαίρου που παρακολουθούν το έτος τα 100 άτομα τότε $\bar{x} = 16$. Έστω $\bar{x}_1$ ο μέσος όρος παρακολούθησης των αγώνων των 50 ατόμων που έχουν εισιτήριο διαρκείας τότε $\bar{x}_1 = 20$ ενώ $\bar{x}_2$ ο μέσος όρος των αγώνων που παρακολουθούν τα 50 άτομα που δεν έχουν εισιτήριο διαρκείας.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot v_1 + \bar{x}_2 \cdot v_2}{v} \Leftrightarrow 16 = \frac{20 \cdot 50 + \bar{x}_2 \cdot 50}{100} \Leftrightarrow 1600 = 1000 + \bar{x}_2 \cdot 50 \Leftrightarrow \bar{x}_2 = 12$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τα δεδομένα έχουμε ότι:

$$\alpha_3 = 90^\circ \Leftrightarrow 360^\circ \cdot f_3 = 90^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow \boxed{f_3 = 0,25}$$

Επίσης:

$$F_3 = 0,7 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,7 \xrightarrow{f_3=0,25} f_1 + f_2 + 0,25 = 0,7 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,45 \quad (1)$$

Όμως ισχύει:

$$f_2 = 2 \cdot f_1 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) προκύπτει:

$$f_1 + 2f_1 = 0,45 \Leftrightarrow 3 \cdot f_1 = 0,45 \Leftrightarrow \boxed{f_1 = 0,15}$$

Επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\boxed{f_2 = 0,3}$$

Επιπλέον:

$$F_4 = F_3 + f_4 \Leftrightarrow F_4 - F_3 = f_4 \Leftrightarrow \boxed{f_4 = 0,2}$$

Επίσης

$$F_5 = F_4 + f_5 \Leftrightarrow F_5 - F_4 = f_5 \Leftrightarrow \boxed{f_5 = 0,1}$$

Δ2. Από τον τύπο $c = \frac{R}{k} \Leftrightarrow c = \frac{10x_1}{5} \Leftrightarrow c = 2x_1$

Αν x_1 η κεντρική τιμή της 1^{ης} κλάσης και c το πλάτος κλάσεων τότε ισχύει:

Η κεντρική τιμή της 2^{ης} κλάσης θα είναι:

$$x_2 = x_1 + c \Leftrightarrow x_2 = 3x_1$$

Η κεντρική τιμή της 3^{ης} κλάσης θα είναι:

$$x_3 = x_1 + 2c \Leftrightarrow x_3 = 5x_1$$

Η κεντρική τιμή της 4^{ης} κλάσης θα είναι:

$$x_4 = x_1 + 3c \Leftrightarrow x_4 = x_1 + 6x_1 \Leftrightarrow x_4 = 7x_1$$

Η κεντρική τιμή της 5^{ης} κλάσης θα είναι:

$$x_5 = x_1 + 4c \Leftrightarrow x_5 = x_1 + 8x_1 \Leftrightarrow x_5 = 9x_1$$

Ισχύει:

$$\bar{x} = 23 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i = 23 \Leftrightarrow x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 = 23$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot f_1 + 3x_1 \cdot f_2 + 5x_1 \cdot f_3 + 7x_1 \cdot f_4 + 9x_1 \cdot f_5 = 23$$

$$\Leftrightarrow x_1 (f_1 + 3f_2 + 5f_3 + 7f_4 + 9f_5) = 23$$

$$\Leftrightarrow x_1 (0,15 + 3 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,25 + 7 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1) = 23$$

$$4,6 \cdot x_1 = 23 \Leftrightarrow x_1 = 5$$

Επομένως:

$$c = 2x_1 \Leftrightarrow c = 10$$

Δ3. Δεδομένου ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 200$ προκύπτει:

$$f_1 = \frac{v_1}{n} \Leftrightarrow v_1 = 200 \cdot 0,15 \Leftrightarrow v_1 = 30$$

$$f_2 = \frac{v_2}{n} \Leftrightarrow v_2 = 200 \cdot 0,30 \Leftrightarrow v_2 = 60$$

$$f_3 = \frac{v_3}{n} \Leftrightarrow v_3 = 200 \cdot 0,25 \Leftrightarrow v_3 = 50$$

$$f_4 = \frac{v_4}{n} \Leftrightarrow v_4 = 200 \cdot 0,20 \Leftrightarrow v_4 = 40$$

$$f_5 = \frac{v_5}{n} \Leftrightarrow v_5 = 200 \cdot 0,1 \Leftrightarrow v_5 = 20$$

Από τα παραπάνω ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Γ(α)

Αριθμός απουσιών	Κεντρική τιμή x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[0–10)	5	30	15	15
[10–20)	15	60	30	45
[20–30)	25	50	25	70
[30–40)	35	70	20	90
[40–50)	45	20	10	100
ΣΥΝΟΛΟ		200	100	

Το διάστημα 15–25 δεν αντιστοιχεί σε κάποια κλάση όμως το 15 είναι η κεντρική τιμή της 2^{ης} κλάσης και το 25 η κεντρική τιμή της 3^{ης} κλάσης. Θεωρούμε τα δεδομένα ομοιόμορφα κατανεμημένα στις κλάσεις επομένως στο διάστημα 15–20 βρίσκονται οι μισοί μαθητές της 2^{ης} κλάσης δηλαδή $\frac{v_2}{2} = \frac{60}{2} = 30$ ενώ στο διάστημα 20–25 θα βρίσκονται οι

μισοί μαθητές της 3^{ης} κλάσης δηλαδή $\frac{v_3}{2} = \frac{50}{2} = 25$.

Άρα συνολικά 30+25=55 μαθητές.

Δ4. Εφόσον 30 μαθητές έχουν από [0–10) απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα [40–50) απουσίες.

Εφόσον 60 μαθητές έχουν από [10–20) απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα [30–40) απουσίες.

Εφόσον 30 μαθητές έχουν από [20–30) απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα [20–30) απουσίες.

Εφόσον 70 μαθητές έχουν από [30–40) απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα [10–20) απουσίες.

Εφόσον 20 μαθητές έχουν από [40–50) απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα [0–10) απουσίες.

Επομένως οι κατανομή στις κλάσεις είναι:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Γ(α)

Αριθμός απουσιών	Κεντρική τιμή x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
$[0-10)$	5	20	100
$[10-20)$	15	70	1050
$[20-30)$	25	50	1250
$[30-40)$	35	60	2100
$[40-50)$	45	30	1350
ΣΥΝΟΛΟ		200	5850

Άρα η μέση τιμή είναι: $\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{5850}{200} = 29,25$