

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 9

A2. α) Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 . Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 ;

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $f^{-1}(f(x)) = x, x \in f(A)$.

Μονάδες 2

β) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε κατά ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

Μονάδες 2

γ) Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(ε)

- δ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 πάντοτε.

Μονάδες 2

- ε) Η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = x \cdot a^{x-1}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$.

- B1.** Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

- B2.** Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x)}$.

Μονάδες 4

- B3. α)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

Μονάδες 5

- β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = 1$, έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 3

- B4.** Αν για τη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow R$ ισχύει:

$e^{3g(x)} + g^3(x) = x^3 \cdot e^6 + (\ln x + 2)^3$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g(x) = \ln x + 2$ και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1 - \sin^2 x - x^2, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ με } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 8

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x)+1 & , x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x} - 1 & , x < 0 \end{cases}$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την παράμετρο κ , ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\kappa = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\kappa = 2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και τον πραγματικό αριθμό x_0 , έτσι ώστε:

- $g(x_0) = x_0 + 1$ και
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = v, v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ .

Μονάδες 6

Δ2. $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x) + f'(x) - f(\rho)}{x - \rho} = e^\rho + 1$, όπου ρ η ρίζα του Δ1 ερωτήματος.

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(ε)

Δ3. α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $g'(x_0) = 1$.

Μονάδες 5

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$, εφάπτεται στην C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$.

Μονάδες 5

Δ4. Η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $(fog)'(x_0) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.

Μονάδες 5