**ΤΑΞΗ:** **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

---

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 217.

**Α2.** **α)** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 241.

**β)** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 151.

**Α3.** **α)** → Λάθος. Το σωστό είναι $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x,\ x\in A$.

**β)** → Λάθος. Το σωστό είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\geq 0$.

**γ)** → Σωστό.

**δ)** → Λάθος. Το σωστό είναι: Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $f\left(x_0\right)$ τότε η σύνθεση τους $gof$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**ε)** → Λάθος. Το σωστό είναι $f'\left(x\right)=a^x\cdot\ln a$.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$ έχει πεδίο ορισμού το $R$.
Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$.

- Τότε έχουμε διαδοχικά:
  $3x_1 < 3x_2$ και $x_1^3 < x_2^3$
  $e^{3x_1} < e^{3x_2}$ και $-x_1^3 > -x_2^3$
  $-e^{3x_1} > -e^{3x_2}$ (1) και $-x_1^3+1 > -x_2^3+1$ (2).

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:
  $-e^{3x_1}-x_1^3+1 > -e^{3x_2}-x_2^3+1$.
  Επομένως $f(x_1) > f(x_2)$.
  Άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $R$.

- Παρατηρούμε ότι $f(0)=-e^0-0+1=-1+1=0$.
  Άρα η $f$ έχει τουλάχιστον, μια ρίζα, το $x_0=0$.
  Αυτή είναι και μοναδική, γιατί η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

- Έτσι για κάθε $x>0$ επειδή η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει $f(x)<f(0)$, δηλαδή $f(x)<0$.
  Ενώ για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>f(0)$, οπότε $f(x)>0$.
  Το πρόσημο της $f$ φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**Β2.** Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $R$, γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, είναι και συνεχής στο $x_0=0$.
Οπότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.
Για $x\neq 0$ έχουμε: $\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{f(x)}$.

Για $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[1-\dfrac{1}{f(x)}\right]=+\infty.$

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

Για $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[1-\dfrac{1}{f(x)}\right]=-\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

**Β3.** **α)** Επειδή η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $R$, είναι και 1–1, επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι το σύνολο τιμών της $f$.

Η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $R$. Έτσι, το σύνολο τιμών της, είναι το $f(R)=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=R$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{3x}-x^3+1\right)=-\infty$.

  -Ειδικά $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$.

  Θέσαμε $u=3x$, οπότε αν $x\to+\infty$ τότε $u\to+\infty$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{3x}-x^3+1\right)=+\infty$.

  -Ειδικά $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$.

  Θέσαμε $u=3x$ οπότε αν $x\to-\infty$ τότε $u\to-\infty$,

  ενώ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$.

**β)** Ισχύουν ισοδύναμα:

$e^{-e^{3x}-x^3-2015}=1\Leftrightarrow e^{-e^{3x}-x^3-2015}=e^0\Leftrightarrow -e^{3x}-x^3-2015=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -e^{3x}-x^3+1=2016\Leftrightarrow f(x)=2016.$

Θέλουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι, η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in R$. Όμως η $f$ είναι συνεχής στο $R$ και η τιμή $2016 \in f(R)=R$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=2016$, έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα $x_0 \in R$.

Αυτή είναι μοναδική, καθώς η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $R$.

**Β4.** Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$e^{3g(x)}+g^3(x)=x^3e^6+(\ln x+2)^3$$

$$\overset{x^3e^6>0}{\Leftrightarrow} e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{\ln(x^3e^6)}+(\ln x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{\ln x^3+\ln e^6}+(\ln x+2)^3$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{3\ln x+6}+(\ln x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{3(\ln x+2)}+(\ln x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)}-g^3(x)=-e^{3(\ln x+2)}-(\ln x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)}-g^3(x)+1=-e^{3(\ln x+2)}-(\ln x+2)^3+1$$

$$\Leftrightarrow f(g(x))=f(\ln x+2)\overset{f_{1-1}}{\Leftrightarrow} g(x)=\ln x+2.$$

- Για την εύρεση της αντίστροφης της $g$, θέτουμε $y=g(x)$ και λύνουμε ως προς $x$.
  Έχουμε λοιπόν ισοδύναμα:
  $g(x)=y \Leftrightarrow y=\ln x+2, y\in R$, καθώς $\ln x+2 \in R$, για κάθε $x>0$.

$$\left.\begin{array}{l}\ln x=y-2 \Leftrightarrow x=e^{y-2}, y\in R\\ \text{όμως } f^{-1}(y)=x\end{array}\right\}$$ οπότε $f^{-1}(y)=e^{y-2}, y\in R$

και έτσι $f^{-1}(x)=e^{x-2}, x\in R$.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)+2xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x-x^2$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)+x^2=\eta\mu^2x$$

$$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2=\eta\mu^2x \qquad \textbf{(1)}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται $h^2(x)=\eta\mu^2x$ (2) και ισχύει για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η εξίσωση $h(x)=0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ γράφεται ισοδύναμα:

$h(x)=0 \Leftrightarrow h^2(x)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2 x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Επομένως, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ μοναδική ρίζα την $x=0$.

Η $h$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών και δεν μηδενίζεται σ' αυτό. Άρα, στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η $h$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}>0.$

Συνεπώς για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,ισχύουν $h(x)>0$ και $\eta\mu x>0$.

Οπότε η σχέση (2) γίνεται ισοδύναμα $h(x)=\eta\mu x$ ή ισοδύναμα $f(x)+x=\eta\mu x$ και τελικά $f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επιπλέον ισχύει $f(0)=\eta\mu 0-0=0$.

Εντέλει δείξαμε ότι, $f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**Γ2.**

Έχουμε $g(x)=\begin{cases} f(x)+1, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1, & x<0 \end{cases}$,με $\kappa\in R$.

-Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η $g$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

-Για κάθε $x\in(-\infty,0)$η $g$ είναι συνεχής γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Επομένως, πρέπει η $g$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$. Οπότε ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$ (1).

-Για $x>0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)+1)=f(0)+1=1$ (2).

Έχουμε δείξει στο Γ1, ότι η $f$ είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0.$

-Για $x<0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1\right]=\kappa-1$ (3).

Αν θέσουμε $u=\kappa x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} u = \lim\limits_{x\to 0^-}(\kappa x)=0$.

Έτσι, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x}=\kappa\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}=\kappa\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\kappa\cdot 1=\kappa$.

Επίσης $g(0)=f(0)+1=1$ (4).

Η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2), (3) και (4) γίνεται ισοδύναμα:
$1=\kappa-1=1$. Οπότε $\kappa-1=1$ και άρα $\kappa=2$.

**Γ3.** Για $\kappa=2$ η $g$ γίνεται:

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+1, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{\eta\mu 2x}{x}-1, & x<0 \end{cases}$$

Η $g$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$.

- $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\eta\mu\left[2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]}{-\dfrac{\pi}{2}}-1=\dfrac{\eta\mu(-\pi)}{-\dfrac{\pi}{2}}-1=\dfrac{\eta\mu\pi}{\dfrac{\pi}{2}}-1=0-1=-1$
- $g(0)=1$

Άρα $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot g(0)<0$.

Έτσι από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

**Γ4.** Παρατηρούμε ότι $g(-2\pi)=\dfrac{\eta\mu(-4\pi)}{-2\pi}-1=\dfrac{\eta\mu 4\pi}{2\pi}-1=0-1=-1$. Επίσης από ερώτημα Γ3, $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

Έτσι ισχύει $g(-2\pi)=g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ενώ $-2\pi\neq-\dfrac{\pi}{2}$.

Ώστε η $g$ δεν είναι $1-1$.

**Ένας δεύτερος τρόπος στην περίπτωση που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε δύο ίσες τιμές, είτε στον ίδιο κλάδο, είτε σε διαφορετικούς κλάδους.**

Παρατηρούμε $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+1=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=2-\frac{\pi}{2}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(-\infty,0)$, ώστε $g(x_0)=2-\frac{\pi}{2}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)==\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}-1\right)=0-1=-1$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

Απόδειξη:

$|\eta\mu 2x|\le 1\Leftrightarrow|\eta\mu 2x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$

$\left|\frac{\eta\mu 2x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, οπότε, από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

Ισχύει $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}-1\right)=1$.

Έστω η συνάρτηση $\Lambda(x)=g(x)-(2-\frac{\pi}{2}),\ x<0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\Lambda(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(2-\frac{\pi}{2})\right]=-1-2+\frac{\pi}{2}=-3+\frac{\pi}{2}<0$.

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α, κοντά στο $-\infty$, ώστε να ισχύει ισοδύναμα: $\Lambda(\alpha)<0\Leftrightarrow g(\alpha)-(2-\frac{\pi}{2})<0\Leftrightarrow g(a)<2-\frac{\pi}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to0^-}\Lambda(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[g(x)-(2-\frac{\pi}{2})\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\frac{\eta\mu 2x}{x}-1-2+\frac{\pi}{2}\right]=2-1-2+\frac{\pi}{2}=-1+\frac{\pi}{2}>0$

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\beta<0$ ,κοντά στο $0$, ώστε να ισχύει ισοδύναμα:

$\Lambda(\beta)>0\Leftrightarrow g(\beta)-(2-\frac{\pi}{2})>0\Leftrightarrow g(\beta)>2-\frac{\pi}{2}$.

Επομένως $g(a)<2-\frac{\pi}{2}<g(\beta)$ και η $g$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]\subseteq(-\infty,0)$. Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ άρα και στο $(-\infty,0)$ ώστε $g(x_0)=2-\frac{\pi}{2}$. Εντέλει $g(x_0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ενώ, $x_0\in(-\infty,0)$ και $\frac{\pi}{2}\in(0,+\infty)$. Άρα $x_0\ne\frac{\pi}{2}$. Οπότε η $g$ δεν είναι $1-1$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}, x\in R$.

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=(e^x)'+(\frac{x^2}{2})'=e^x+x, x\in R$.

Έστω $x_1,x_2\in R, \mu\varepsilon\ x_1<x_2$, τότε ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει: $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2$, ,δηλαδή $f'(x_1)<f'(x_2)$.

Επομένως η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η $f'$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f'\big((-\infty,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$.

Όντως, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Όντως, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Το $0\in f'(R)=R$, άρα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\rho\in R$ τέτοιος ώστε $f'(\rho)=0$.

Ο $\rho$ είναι μοναδικός, διότι η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Τελικά, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $\rho$.

**Δ2.** Για $x\neq\rho$, έχουμε:

$$\lim_{x\to\rho}\frac{f(x)+f'(x)-f(\rho)}{x-\rho}\overset{f'(\rho)=0}{=}\lim_{x\to\rho}\left(\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}+\frac{f'(x)-f'(\rho)}{x-\rho}\right)=$$

$=f'(\rho)+f''(\rho)=0+e^\rho+1=e^\rho+1$, διότι η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^x+1, x\in R$.

**Δ3.** **α)** Ισχύει: $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(x_0+\nu h)-g(x_0)}{h}=\nu, \nu\in N^*$ και $\nu\neq1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσο με 1.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+\nu h)-g(x_0)}{\nu h}=\frac{1}{\nu}\cdot\lim_{h\to0}\frac{g\left(x_0+\nu h\right)-g\left(x_0\right)}{h}=\frac{1}{\nu}\cdot\nu=1$$

Θέσαμε $x_0+\nu h=x\Leftrightarrow x-x_0=\nu h\Leftrightarrow h=\frac{x-x_0}{\nu}$.

Αν $x\to x_0$ τότε $h\to0$.

Επομένως, $g'(x_0)=1$.

**β)** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της $A\left(0, f\left(0\right)\right)$ έχει εξίσωση:
$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$.
Η εφαπτομένη της $C_g$ στο σημείο της $\mathrm{B}\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ έχει εξίσωση:
$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0 - 1 = 1(x - x_0) \Leftrightarrow y = x + 1$.
Προφανώς οι δύο εφαπτόμενες συμπίπτουν.

**Δ4.** Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ με $g'(x_0) = 1$.
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0) = x_0 + 1,$ με
$f'(g(x_0)) = f'(x_0 + 1) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.
Η $fog$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, με: $(fog)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.