ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260-261.

Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246.

Α.3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280.

Α.4.

- **i.** Σωστό
- **ii.** Λάθος
- **iii.** Σωστό
- **iv.** Σωστό
- **v.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ και}$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{-(1+3)}{2}=-1 \text{ οπότε}$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}=\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^{33}=(-1)^{33}=-1$$

Επίσης $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$ οπότε $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50}=i^{50}=\left(i^4\right)^{12}\cdot i^2=-1$

Συνεπώς $\left|z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}\right|^2+\left|z-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}\right|^2=4 \Leftrightarrow |z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow$

$(z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow$

$2z\overline{z}=2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος (c) με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ίση με 1, δηλαδή (c): $x^2+y^2=1$

2

Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99}=\left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=$$

$$=\left(\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=\left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}=$$

$$=\left(-\frac{1^2-i^2\sqrt{3}^2}{4}\right)^{33}=\left(-\frac{1+3}{4}\right)^{33}=-1$$

Επίσης

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50}=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{50}=i^{50}=\left(i^4\right)^{12}\cdot i^2=-1$$

Συνεπώς

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow |z|=1$$

Β.2. Ισχύει ότι:

$2w\cdot z-2z-w+4=0 \Leftrightarrow 2w\cdot z-2z=w-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z(w-1)=w-4 \Rightarrow 2|z||w-1|=|w-4| \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot1\cdot|w-1|=|w-4| \Leftrightarrow 4|w-1|^2=|w-4|^2 \Leftrightarrow$

$4(w-1)(\overline{w}-1)=(w-4)(\overline{w}-4) \Leftrightarrow$

$4(w\overline{w}-w-\overline{w}+1)=w\overline{w}-4w-4\overline{w}+16 \Leftrightarrow$

$4w\overline{w}-\cancel{4w}-\cancel{4\overline{w}}+4=w\overline{w}-\cancel{4w}-\cancel{4\overline{w}}+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3w\overline{w}=12 \Leftrightarrow |w|^2=4 \Leftrightarrow |w|=2$.

Β.3. **i.** Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 ανήκουν στον κύκλο (C) ισχύει ότι $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ οπότε $|z_1|^2=|z_2|^2=|z_3|^2=1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}=1$

συνεπώς. $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$, $\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$ και $\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$. Έχουμε ότι

$$\overline{t}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{1+z_1z_2z_3}\right)}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}+\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}+\overline{z_1}\cdot\overline{z_3}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}}=$$

$$\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1\cdot z_2}+\frac{1}{z_2\cdot z_3}+\frac{1}{z_1\cdot z_3}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{z_3}}=\frac{\frac{z_2\cdot z_3+z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2+z_3+z_1+z_2}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}}{\frac{z_1\cdot z_2\cdot z_3+1}{z_1\cdot z_2\cdot z_3}}=t$$

άρα $t\in\mathbb{R}$.

ii. Ισχύει $\left|\frac{z_1-w}{w-z_2}\right|=\frac{|z_1-w|}{|w-z_2|}\le\frac{|z_1|+|w|}{|w-z_2|}\le\frac{|z_1|+|w|}{\big||w|-|z_2|\big|}=\frac{1+2}{|2-1|}=3$ και

$$\left|\frac{z_1-w}{w-z_2}\right|=\frac{|z_1-w|}{|w-z_2|}\ge\frac{\big||z_1|-|w|\big|}{|w-z_2|}\ge\frac{\big||z_1|-|w|\big|}{|w|+|z_2|}=\frac{|1-2|}{2+1}=\frac{1}{3}$$ άρα $\frac{1}{3}\le\left|\frac{z_1-w}{w-z_2}\right|\le 3$

2^ος^ Τρόπος

Ισχύει $\big||z_1|-|w|\big|\le|z_1-w|\le|z_1|+|w| \Leftrightarrow 1\le|z_1-w|\le 3$ και

$\big||w|-|z_2|\big|\le|w-z_2|\le|w|+|z_2| \Leftrightarrow 1\le|w-z_2|\le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{1}{|w-z_2|}\le 1$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε

$\frac{1}{3}\le\left|\frac{z_1-w}{w-z_2}\right|\le 3$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x>-1$ έχουμε:

$$f'(x)-f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)-3 \Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{x+1}-f(x)+\ln(x+1)=-3 \Leftrightarrow$$

$\left[f(x)-\ln(x+1)\right]'-\left[f(x)-\ln(x+1)\right]=-3 \ (1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=f(x)-\ln(x+1) \ (2)$. Τότε η (1) γίνεται:

$$F'(x)-F(x)=-3\overset{e^{-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} F'(x)\cdot e^{-x}-F(x)\cdot e^{-x}=-3e^{-x}\Leftrightarrow \left(F(x)\cdot e^{-x}\right)'=\left(3e^{-x}\right)'.$$

Τότε $F(x)\cdot e^{-x}=3e^{-x}+c\Leftrightarrow F(x)=3+ce^{x}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x)-\ln(x+1)=3+ce^{x}$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)-\ln(0+1)=3+ce^{0}\Leftrightarrow 2=3+c\Leftrightarrow c=-1$.

Άρα $f(x)=3-e^{x}+\ln(x+1)$.

<u>2ος Τρόπος</u>

Για κάθε $x>-1$ έχουμε

$$f'(x)-f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot\frac{1}{x+1}-e^{-x}\cdot\ln(x+1)-3e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot\ln(x+1)+3e^{-x}+c\Leftrightarrow f(x)=\ln(x+1)+3+c\cdot e^{-x}$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\ln(0+1)+c\cdot e^{0}\Leftrightarrow 2=3+c\Leftrightarrow c=-1$.

Άρα $f(x)=3-e^{x}+\ln(x+1)$.

Γ.2. **α.** Έχουμε $e^{x}-\ln(x+1)=3\Leftrightarrow 3-e^{x}+\ln(x+1)=0\Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι:

$$f'(x)=-e^{x}+\frac{1}{x+1}\ \text{ και }\ f''(x)=-e^{x}-\frac{1}{(x+1)^2}<0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f'(0)=-e^{0}+\frac{1}{0+1}=0$.

Τότε

- Για $x<0\Leftrightarrow f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$
- Για $x>0\Leftrightarrow f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

<u>Σύνολο τιμών</u>

- Αν $x \in A_1 = (-1,0]$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ισχύει $f(A_1) = f((-1,0]) = \left(\lim\limits_{x\to -1^+} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 2]$ γιατί $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(3 - e^x + \ln(x+1)\right) = -\infty$ και $f(0) = 2$
- Αν $x \in A_2 = [0,+\infty)$ τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής ισχύει $f(A_2) = f([0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 2]$ γιατί

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(3 - e^x + \ln(x+1)\right) = \lim_{x\to +\infty} e^x\left(3e^{-x} - 1 + \frac{\ln(x+1)}{e^x}\right) = -\infty$$

όπου $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{e^x} = 0\cdot 0 = 0 \text{ και } \lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$$

Άρα υπάρχουν $\rho_1 \in (-1,0)$ και $\rho_2 \in (0,+\infty)$ μοναδικά (λόγω μονοτονίας) τέτοια ώστε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$,δηλαδή η εξίσωση $e^x - \ln(x+1) = 3$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1, ρ_2 στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

β. Είναι

$3 + \ln(x+1) = e^x + \alpha x^3 \Leftrightarrow 3 - e^x + \ln(x+1) - \alpha x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) - \alpha x^3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = f(x) - \alpha x^3$

Για την συνάρτηση k ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο διάσημα $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
  $k(\rho_1) = f(\rho_1) - \alpha\rho_1^3 = -\alpha\rho_1^3$
  $k(\rho_2) = f(\rho_2) - \alpha\rho_2^3 = -\alpha\rho_2^3$
  Τότε $k(\rho_1)\cdot k(\rho_2) = \alpha^2\rho_1^3\rho_2^3$ (1)
- Αν $\alpha = 0$ τότε $k(\rho_1)\cdot k(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 \text{ ρίζα} \\ k(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_2 \text{ ρίζα} \end{cases}$
- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $k(\rho_1)\cdot k(\rho_2) < 0$, από τη σχέση (1) γιατί $\rho_1\rho_2 < 0$.
  Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $k(\rho) = 0$
  Τελικά υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$\ln(\ln x+1)+e^{x-1}>\ln x+x \Leftrightarrow \ln(\ln x+1)-x+3>\ln(x-1+1)-e^{x-1}+3 \Leftrightarrow$$

$$f(\ln x)>f(x-1) \overset{f\ \text{γνησ. φθίν.}}{\Leftrightarrow} \ln x<x-1 \text{ (από το ερώτημα (α))}$$

που ισχύει για κάθε $x>1$, λόγω εφαρμογής 2 του σχολικού σελίδα 266.

Γ.3. Είναι

$$G(x)=\frac{2-f(x)+\ln(x+1)}{x\cdot e^x+1}=\frac{2-\left(3-e^x+\ln(x+1)\right)+\ln(x+1)}{x\cdot e^x+1}=\frac{e^x-1}{x\cdot e^x+1}$$

Τότε

$$G'(x)=\frac{(e^x-1)'(x\cdot e^x+1)-(e^x-1)(x\cdot e^x+1)'}{(x\cdot e^x+1)^2}=\frac{e^x(x\cdot e^x+1)-(e^x-1)(e^x+x\cdot e^x)}{(x\cdot e^x+1)^2}=$$

$$G'(x)=\frac{e^x\left[(x\cdot e^x+1)-(e^x-1)(1+x)\right]}{(x\cdot e^x+1)^2}=\frac{e^x\left(\cancel{x\cdot e^x}+1-e^x-\cancel{x\cdot e^x}+1+x\right)}{(x\cdot e^x+1)^2}=\frac{e^x(x-e^x+2)}{(x\cdot e^x+1)^2}$$

Είναι $\dfrac{e^x}{(x\cdot e^x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-e^x+2, x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$G'(x)=\frac{e^x}{(x\cdot e^x+1)^2}\cdot g(x)$$

Είναι

- $g'(x)=1-e^x$ και αν $g'(x)=0\Leftrightarrow 1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$
- Αν $g'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x<0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $g'(x)<0\Leftrightarrow 1-e^x<0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x>-1$ έχουμε:

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	↗		↘

Η g παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $g(0)=1$.

<u>Σύνολο τιμών της g</u>

- Αν $x \in A_1 = (-1,0]$ τότε επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $g(A_1) = g((-1,0]) = \left(\lim\limits_{x\to -1} g(x), g(0)\right] = \left(1-\frac{1}{e}, 1\right]$ γιατί
  $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x - e^x + 2\right) = 1 - \frac{1}{e} > 0$
  Τότε δεν υπάρχει λύση γιατί $g(x) \neq 0 \Rightarrow G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,0]$.

- Αν $x \in A_2 = [0,+\infty)$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $g(A_2) = g([0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} g(x), g(0)\right] = (-\infty, 1]$ γιατί
  $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - e^x + 1\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ όπου
  $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$
  Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \in g(A_2)$
  Για $x < x_0 \overset{g\ \text{γνησ.φθίν.}}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow G'(x) > 0$
  Για $x > x_0 \overset{g\ \text{γνησ.φθίν.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow G'(x) < 0$
  Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, x_0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$ και $G(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο (μοναδικό).
  Από την σχέση $g(x_0) = 0$ έχουμε $x_0 - e^{x_0} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = x_0 + 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. **α.** Έχουμε

$G'(x) = G(x) + e^x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και η G' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων της G και του γινομένου $e^x \cdot f(x)$ (εκθετική και από υπόθεση) με παράγωγο

$$G''(x) = G'(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = G(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) =$$

$$= e^x \int_0^x f(t)dt + 2e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x\left(\int_0^x f(t)dt + 2f(x) + f'(x)\right) > 0 \text{ διότι}$$

$H'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=e^{2x}\left(2f(x)+f'(x)\right)$

Αλλά η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα οπότε ισχύει $H'(x)\ge 0$. (Σχόλιο σχ. βιβλίου 254).

Άρα $e^{2x}\left(2f(x)+f'(x)\right)\ge 0 \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} 2f(x)+f'(x)\ge 0$ (1)

Επίσης για $t>0 \overset{H\ \gamma\nu.\ \alpha\acute{\upsilon}\xi}{\Rightarrow} H(t)>H(0)\Rightarrow H(t)>e^0 f(0)\Rightarrow H(t)>1>0\Rightarrow$

$e^{2t}\cdot f(t)>0\Rightarrow f(t)>0\Rightarrow \int_0^x f(t)dt>0$ (2).

Από (1) και (2) με πρόσθεση έχουμε $\int_0^x f(t)dt+2f(x)+f'(x)>0$

Άρα η συνάρτηση G είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β.
- η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,x]$
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,x)$ με $G'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot\int_0^x f(t)dt$

  Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,x)$ ώστε

  $$G'(\xi)=\frac{G(x)-G(0)}{x}=\frac{G(x)}{x}$$
- Αφού η G είναι κυρτή η G' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα για:

  $$0<\xi<x \Leftrightarrow G'(0)<G'(\xi)<G'(x)\Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow G(0)+e^0 f(0)<\frac{G(x)}{x}<G'(x)\Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow 1<\frac{G(x)}{x}<G'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<G(x)<x\cdot G'(x)$$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

2ος Τρόπος

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\varphi(x)=G(x)-x$ με $\varphi'(x)=G'(x)-1$ και την $h(x)=x\cdot G'(x)-G(x)$ με $h'(x)=\cancel{G'(x)}+x\cdot G''(x)-\cancel{G'(x)}=x\cdot G''(x)$.

- Για $x>0 \overset{G'\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Rightarrow} G'(x)>G'(0)\Leftrightarrow G'(x)>1\Leftrightarrow G'(x)-1>0\Leftrightarrow \varphi'(x)>0$

  Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε:

  Για $x>0\Leftrightarrow \varphi(x)>\varphi(0)\Leftrightarrow G(x)-x>0\Leftrightarrow G(x)>x$ (3)
- Ισχύει $h'(x)=x\cdot G''(x)>0$

  Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε:

Για $x>0 \Leftrightarrow h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow x\cdot G'(x)>G(x)$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει $x<G(x)<x\cdot G'(x)$

γ. Επιπλέον ισχύει:

$G(x)<x\cdot G'(x) \Rightarrow x\cdot G'(x)-G(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $h(x)=x\cdot G'(x)-G(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση διότι

- Η συνάρτηση $H_1(x)=x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική
- Η συνάρτηση G' αφού ορίζεται η G'', όπως και η G που αναφέρεται παραπάνω είναι συνεχείς. Επομένως η $h(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $x_0\in(0,1)$.

Έχουμε:

$h(x)>0 \Rightarrow \int_{x_0}^{1} h(x)\,dx>0 \Leftrightarrow$ (γιατί η h δεν είναι πάντα μηδέν).

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{1}\left(x\cdot G'(x)-G(x)\right)dx>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{1} x\cdot G'(x)dx-\int_{x_0}^{1} G(x)dx>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x\cdot G(x)\right]_{x_0}^{1}-\int_{x_0}^{1}(x)'\cdot G(x)dx-\int_{x_0}^{1} G(x)dx>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(1)-x_0\cdot G(x_0)-\int_{x_0}^{1} G(x)dx-\int_{x_0}^{1} G(x)dx>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(1)-x_0\cdot G(x_0)>2\int_{x_0}^{1} G(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{1} G(x)dx<\frac{G(1)-x_0\cdot G(x_0)}{2}.$$

Δ.2. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt-x^2}{x-\eta\mu x}=\frac{0}{0} \text{ γιατί}$$

Η συνάρτηση $f_1(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη οπότε η $f_2(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Η συνάρτηση $f_3(x)=x^2$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Η συνάρτηση $f_4(x)=\int_0^x x\cdot f(t)dt = x\cdot\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $f_5(x)=\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $f_6(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική.

Η συνάρτηση $f_7(x)=x-\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα οι συναρτήσεις f_5 και f_7 είναι παραγωγίσιμες και έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}(x-\eta\mu x)=0$$

Επομένως έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες κοντά στο μηδέν. Για την άρση της απροσδιοριστίας το όριο κοντά στο μηδέν γράφεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^x f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\int_0^x f(t)dt - x\right)}{x-\eta\mu x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\eta\mu x}\cdot\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{x^2}=6\cdot\frac{2015}{6}=2015$$

γιατί με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\eta\mu x}=6$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt - x\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'-1}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{2}\cdot f'(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2015}{3}=\frac{2015}{6}$$

2ος Τρόπος

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\int_0^x f(t)dt - x^2}{x-\eta\mu x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cdot\int_0^x f(t)dt\right)' - 2x}{(x-\eta\mu x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x) + \int_0^x f(t)dt - 2x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot f(x) - x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot f(x) - x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-1}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right) = \frac{2015}{3}\cdot 2 + \frac{2015}{3} = 2015$$

γιατί με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = \frac{2015}{3}$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1-\sigma\upsilon\nu x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{x}{\eta\mu x} = f'(0)\cdot 1 = \frac{2015}{3}$

Δ.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_x^{x+1} G(t)dt$ η οποία ορίζεται στο $[0,+\infty)$ αφού η G είναι συνεχής σε αυτό και οι συναρτήσεις x, x+1 έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και θα πρέπει:

$$\left.\begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\geq 0.$$

Άρα το $D_F = [0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με παράγωγό που ορίζεται ως εξής:
Έστω $\alpha \in [0,+\infty)$. Τότε

$$F(x) = \int_\alpha^{x+1} G(t)dt - \int_\alpha^{x} G(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = G(x+1)(x+1)' - G(x) = G(x+1) - G(x)$$

- Η F συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x,x+1] \subseteq [0,+\infty)$. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την F στο διάστημα $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x,x+1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \dfrac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} = F(x+1)-F(x) = \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt - \int_x^{x+1} G(t)dt$

- *Μονοτονία της* F'

  Έχουμε: $F''(x) = G'(x+1)(x+1)' - G'(x) = G'(x+1) - G'(x) > 0$ για κάθε στο $[0,+\infty)$ αφού στο **Δ1** δείξαμε ότι η G είναι κυρτή άρα η G' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει:

  $$x < x+1 \overset{G' \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} G'(x) < G'(x+1) \Rightarrow G'(x+1) - G'(x) > 0 \Leftrightarrow F''(x) > 0$$

  οπότε η F' είναι γνησίως αύξουσα.

- *Διάταξη*

  Ισχύει ότι:

  $$\xi \in (x,x+1) \Leftrightarrow x < \xi < x+1 \Rightarrow \xi < x+1 \overset{F' \text{ γν.αύξ.}}{\Rightarrow} F'(\xi) < F'(x+1) \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt - \int_x^{x+1} G(t)dt < G(x+2) - G(x+1) \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow G(x+1) + \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt < G(x+2) + \int_x^{x+1} G(t)dt$$

2ος Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $\omega(x) = G(x+1) - \int_x^{x+1} G(t)dt$, $x > 0$.

Έχουμε για $\alpha \in (0,+\infty)$

$$\omega'(x) = G'(x+1) - \left(\int_x^{x+1} G(t)dt\right)' = G'(x+1) - \left(\int_\alpha^{x+1} G(t)dt - \int_\alpha^{x} G(t)dt\right)' =$$

$$= G'(x+1) - G(x+1) + G(x) =$$

$$= \cancel{e^{x+1}\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt} + e^{x+1}\cdot f(x+1) - \cancel{e^{x+1}\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt} + e^{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt =$$

$$= e^{x+1}\cdot f(x+1) + e^{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt > 0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Επομένως η συνάρτηση ω είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ισχύει

$$x < x+1 \Leftrightarrow \omega(x) < \omega(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(x+1) - \int_{x}^{x+1} G(t)dt < G(x+2) - \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(x+1) + \int_{x+1}^{x+2} G(t)dt < G(x+2) + \int_{x}^{x+1} G(t)dt$$

Δ.4. Είναι

$$F(1) = \int_0^1 e^t f'(t)dt = \left[e^t\cdot f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(e^t\right)'\cdot f(t)dt =$$

$$= e\cdot f(1) - f(0) - \int_0^1 e^t\cdot f(t)dt \ \ (1)$$

Αλλά από υπόθεση ισχύει $F(1) = e\cdot f(1) - 2 \ \ (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\cancel{e\cdot f(1)} - 2 = \cancel{e\cdot f(1)} - f(0) - \int_0^1 e^t\cdot f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 = -1 - \int_0^1 e^t\cdot f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^1 e^t\cdot f(t)dt = 1 \ \ (3)$$

Επίσης

$G(0) = 0$ και $G'(x) = G(x) + e^x f(x)$ οπότε $G'(0) = G(0) + e^0 f(0) = f(0) = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $O(0, G(0))$ είναι:

$$y - G(0) = G'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$$

Επειδή η G είναι κυρτή και η $y = x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της G στο σημείο $O(0, G(0))$ ισχύει ότι $G(x) - x \geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Επειδή η $G(x) - x$ είναι συνεχής το εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^1 \left(G(x) - x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 G(x)dx - \int_0^1 x\,dx = \int_0^1 e^x\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \int_0^1 \left(e^x\right)' \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \left[e^x \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)' dx - \frac{1}{2} =$$

$$= e\int_0^1 f(t)\,dt - \cancel{e^0 \int_0^0 f(t)}\,dt - \int_0^1 e^x f(x)\,dx - \frac{1}{2} \overset{(3)}{=}$$

$$= G(1) - 1 - \frac{1}{2} = \frac{2G(1) - 3}{2}$$