

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Δευτέρα 5 Ιανουαρίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει:
 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 8

A2. Έστω f μία συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ ;

Μονάδες 3

A3. Πότε μια συνάρτηση f (θα λέμε ότι) είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστή, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει: $z = w \Leftrightarrow |z| = |w|$.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η γραφική παράστασή της τέμνει την $y = x$ στο σημείο A , τότε η γραφική παράσταση της αντίστροφης της διέρχεται από το σημείο A .

γ. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) < \ell$ για κάθε x κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \ell$.

δ. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 5$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 5$.

ε. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = -\ln x$.

B 1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της.
Μονάδες 8

B 2. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(1, g(1))$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g^{-1} .

Μονάδες 9

B 3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = \ln x - e^{-x}$.

Μονάδες 4

B 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{αν } x > \alpha \\ g^{-1}(x) & \text{αν } x \leq \alpha \end{cases}$ με $\alpha > 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha > 0$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο α .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση h με $h(x) = x^3 + e^x$ ώστε:

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(0) - f(1)) \cdot x^5 + x^3 + 1}{f^2(1) \cdot x^2 + x + 1} = -\infty$

✓ $(g \circ g)(x) = f(0) \cdot g^3(x) + f(1) \cdot f(x^3 + e^x + 2015)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

✓ Η f γνησίως μονότονη.

Γ 1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα (*Μονάδες 4*) και ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα (*Μονάδες 2*).

Μονάδες 6

Γ 2. Να δείξετε ότι η g είναι $\lll 1 - 1 \ggg$.

Μονάδες 9

Γ 3. Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(0) \cdot x^4 + x^2}{f(1) \cdot x^2 + x + 1} + \eta \mu x \right) = +\infty.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο μιγαδικός z που ικανοποιεί τη $\frac{-2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2} + |w| = 0$, $z \neq 0$ όπου w η ρίζα της $w^2 - \sqrt{3} \cdot w + 1 = 0$ με φανταστικό μέρος θετικό.

Δ1. Να δείξετε ότι $w^{1821} = -i$ και ότι $|w| = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι $|z - 1| = 1$ και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z .

Μονάδες 4

Δ3. α. Αν ισχύει $z \cdot u = 1 + i$ να δείξετε ότι η εικόνα του u ανήκει πάνω σε ευθεία με εξίσωση $x + y - 1 = 0$.

Μονάδες 4

β. Να βρεθεί ο μιγαδικός u που ελαχιστοποιεί την παράσταση $|z - 1 + z \cdot u - u|$ και η αντίστοιχη τιμή του z .

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{|z + \bar{z} - 2| - 2}{x} = \frac{|z - \bar{z}| - 2}{1 - x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο \mathbb{R} , όπου $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ και $\alpha \neq 1$.

Μονάδες 9