

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2013  
 Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό βιβλίο, έκδοση 2012 σελ. 262, θεώρημα (περίπτωση iii).

**A2. α.** Σχολικό βιβλίο, έκδοση 2012 σελ. 275, ορισμός.

**β.** Σχολικό βιβλίο, έκδοση 2012 σελ. 143, ορισμός και το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ . Δηλαδή είναι το σύνολο  $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ .

**A3.**  $\Lambda - \Sigma - \Lambda - \Lambda - \Sigma$ .

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Έστω  $z = x + yi$ . Ισχύει:

$$\begin{aligned} \bar{z}(z+2) &= -|1-i|^2 z - 3 \Leftrightarrow \\ \bar{z}z + 2\bar{z} &= -(\sqrt{1^2 + (-1)^2})^2 \cdot z - 3 \Leftrightarrow \\ \bar{z}z + 2\bar{z} &= -2z - 3 \Leftrightarrow \\ \bar{z}z + 2z + 2\bar{z} + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \bar{z}z + 2(z + \bar{z}) + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + 2 \cdot 2x + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + 4x + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 &= 4 - 3 \Leftrightarrow \\ (x+2)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(-2,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

ή

**Δεύτερος τρόπος:**

Για την εξίσωση  $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$  έχουμε  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$  δηλαδή είναι κύκλος με κέντρο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  δηλαδή  $K(-2,0)$  και  $\rho = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ .

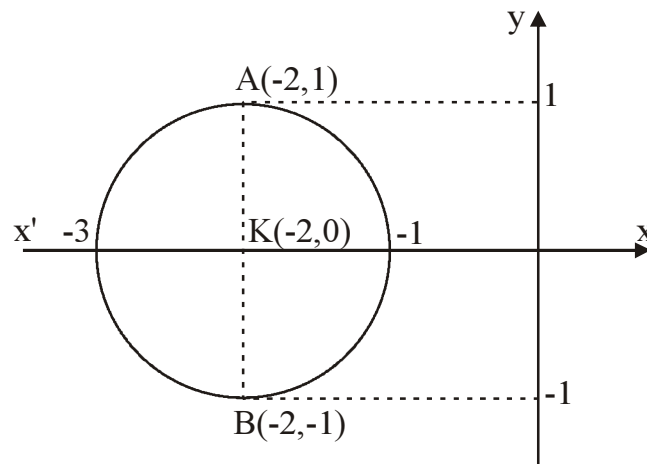
Αφού οι εικόνες των  $z, \bar{z}$  είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ , ο γεωμετρικός τόπος του  $\bar{z}$  είναι ο συμμετρικός του παραπάνω κύκλου ως προς τον  $x'x$ . Συνεπώς είναι ο ίδιος κύκλος, αφού το κέντρο του είναι σημείο του άξονα  $x'x$ .

**B2.** Αφού οι αριθμοί  $z$  και  $\bar{z}$  έχουν εικόνες σημεία του ίδιου κύκλου, τότε η μέγιστη τιμή του  $|z - \bar{z}|$ , δηλαδή η μέγιστη απόσταση των εικόνων τους, επιτυγχάνεται όταν οι εικόνες των  $z, \bar{z}$  είναι σημεία αντιδιαμετρικά. Συνεπώς η μέγιστη τιμή του  $|z - \bar{z}|$  είναι  $2\rho = 2$ .

Οι αριθμοί  $z, \bar{z}$  για τους οποίους έχουμε τη μέγιστη τιμή του  $|z - \bar{z}|$ , έχουν εικόνες σημεία συμμετρικά ως προς τον  $x'x$ , αφού είναι συζυγείς (δηλαδή με την ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη) και ταυτόχρονα αντιδιαμετρικά του παραπάνω κύκλου. Άρα είναι συμμετρικά και ως προς το κέντρο  $K$ , δηλαδή έχουν την ίδια τετμημένη  $x = -2$  με το κέντρο. Συνεπώς οι εικόνες τους είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x = -2 \\ (x+2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Άρα οι αριθμοί  $z, \bar{z}$  που επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή του  $|z - \bar{z}|$  είναι οι  $-2 + i, -2 - i$  ή αντίστροφα με εικόνες τα σημεία  $A(-2,1)$  και  $B(-2,-1)$ .



**β' τρόπος:**

Είναι  $|z - \bar{z}| = |2yi| = 2|y| = 2\rho = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ .

Τότε  $(x+2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ , δηλ.  $z = -2+i$  και  $\bar{z} = -2-i$  ή αντίστροφα.

**B3.** Αφού  $|z - \bar{z}| = 2$  οι αριθμοί  $z, \bar{z}$  είναι αυτοί που επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή του  $|z - \bar{z}|$  και επειδή  $\text{Im}(z) > 0$  από το ερώτημα B2. προκύπτει ότι  $z = -2+i$  και  $\bar{z} = -2-i$ .

$$\text{Τότε } \left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)^{2013} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{2013} = i^{2013} = i^{4 \cdot 503 + 1} = i^1 = i.$$

**B4.** Οι μιγαδικοί  $z$  βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $K(-2, 0)$  και ακτίνα  $\rho=1$  δηλαδή για το μέτρο τους ισχύει:

$$|z - (-2 + 0i)| = 1 \Leftrightarrow |z + 2| = 1$$

$$\text{Έχουμε: } w = 2z - i \Leftrightarrow w + i = 2z \Leftrightarrow w + 4 + i = 2z + 4 \Leftrightarrow w + 4 + i = 2(z + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |w + 4 + i| = 2|z + 2| \Leftrightarrow |w - (-4 - i)| = 2 \cdot 1 = 2$$

δηλαδή οι εικόνες των  $w$  ανήκουν σε κύκλο με κέντρο  $\Lambda(-4, -1)$  και ακτίνα  $\rho_1=2$ .

**β' τρόπος:** Αφού  $w = 2z - i \Leftrightarrow w + i = 2z \Leftrightarrow z = \frac{w+i}{2}$ .

$$\text{Άρα } |z + 2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+i}{2} + 2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+i+4}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|w - (-4 - i)|}{2} = 1 \Leftrightarrow |w - (-4 - i)| = 2$$

δηλ. οι εικόνες των  $w$  ανήκουν σε κύκλο με κέντρο  $\Lambda(-4, -1)$  και ακτίνα  $\rho_1=2$ .

Έχουμε  $w = 2z - i \Leftrightarrow w - z = z - i \Rightarrow |w - z| = |z - i|$ , δηλαδή η απόσταση των εικόνων των  $z$  και  $w$  είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του  $z$  από την εικόνα του  $i$ , που είναι το σημείο  $A(0,1)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

$$\text{Πρέπει } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow \ln a = 1 = \ln e \Leftrightarrow a = e.$$

Για την παράγωγο στο 0 έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{-e^0}{e^0 + e^0 + 0 \cdot e^0} = -\frac{1}{2}.$$

**Γ2. α.**  $f'(x) = \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{1 \cdot (e^x - 1) - x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}, \quad x \neq 0.$

Θέτω  $g(x) = e^x - 1 - x \cdot e^x$ .

Τότε  $g'(x) = e^x - e^x - x \cdot e^x = -xe^x$

Αν  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Το πρόσημο και η μονοτονία των  $g(x)$  και  $f(x)$  φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗		↘
	-	0	-
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	↘		

Αφού η  $g(x)$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0=0$ , το  $g(0)=0$ , θα είναι αρνητική για  $x \neq 0$ .

Άρα η  $f'(x)$  είναι αρνητική για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  δηλ.  $f \searrow \mathbb{R}$ .

β. Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

Άρα η  $C_f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y=0$  (άξονας  $x'x$ ).

Ακόμη  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{-\infty}{0-1} = +\infty$ .

Άρα το σύνολο τιμών της  $f(x)$  είναι  $f(A) = (0, +\infty)$ .

Ελέγχουμε για ασύμπτωτη στο  $-\infty$ .

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{0-1} = -1$  και

$[f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{e^x - 1} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x \cdot e^x - x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1}$ .

Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$  οπότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0-1} = 0$ .

Άρα η ευθεία  $y=-x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση  $g(x) = 2x - \int_0^x \frac{1}{f(t)+1} dt - \frac{1}{2013}$  συνεχή στο  $[0, 1]$  σαν

πράξεις συνεχών συναρτήσεων με  $g(0) = 2 \cdot 0 - \int_0^0 \frac{1}{f(t)+1} dt - \frac{1}{2013} = -\frac{1}{2013} < 0$

και  $g(1) = 2 \cdot 1 - \int_0^1 \frac{1}{f(t)+1} dt - \frac{1}{2013}$ .

Όμως  $f(t) > 0$  οπότε  $f(t)+1 > 1$  δηλ.  $0 < \frac{1}{f(t)+1} < 1$ .

Άρα  $\int_0^1 0 \cdot dt < \int_0^1 \frac{1}{f(t)+1} dt < \int_0^1 1 \cdot dt \Leftrightarrow 0 < \int_0^1 \frac{1}{f(t)+1} dt < 1(1-0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 < \int_0^1 \frac{1}{f(t)+1} dt < 1.$$

Άρα  $g(1) > 0$  οπότε από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $g(x)=0$  στο  $(0,1)$ .

Η ρίζα είναι μοναδική γιατί η  $g(x) \uparrow \downarrow [0,1]$  αφού:

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{f(x)+1} > 0 \text{ αφού } 0 < \frac{1}{f(x)+1} < 1.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Επειδή για την παραγωγίσιμη  $f(x)$  στο  $[0, +\infty)$  ισχύει  $f'(x) > 0$  θα είναι  $f(x)$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , οπότε για κάθε  $x > 0$  έχουμε  $f(x) > f(0) = 1 > 0$ .  
 Άρα για  $x > 0$  θα είναι  $\int_0^x f(t)dt > 0 \Leftrightarrow F(x) > 0$ . Για  $x=0$  θα είναι  $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ , δηλαδή  $F(x) \geq 0$  για κάθε  $x \geq 0$ .

Για να δείξουμε ότι  $G(x) \geq x$  για κάθε  $x \geq 0$  κάνουμε τα εξής:

**α' τρόπος:** Θεωρούμε την συνάρτηση  $K(x) = G(x) - x$ , παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$ , σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με  $K'(x) = G'(x) - 1 > 0$ .  
 Άρα  $K(x) \nearrow [0, +\infty)$ , δηλαδή  $K(x) > K(0) = 0$  για  $x > 0$ .  
 Είναι  $K(0) = G(0) - 0 = 0$ .  
 Άρα για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  ισχύει  $K(x) \geq 0 \Leftrightarrow G(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow G(x) \geq x$ .

**β' τρόπος:** Αν  $x=0$  τότε  $G(0)=0$  δηλαδή ισχύει σαν ισότητα.  
 Αν  $x > 0$ , τότε ορίζεται διάστημα  $[0, x]$ , στο οποίο η συνάρτηση  $K(t) = G(t) - t$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη (διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και  $K(x)$  παραγωγίσιμη στο  $(0, x)$  με  $K'(t) = G'(t) - 1 > 0$ . Άρα από Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, x)$ , τέτοιο ώστε,  

$$K'(\xi) = \frac{K(x) - K(0)}{x - 0} \Leftrightarrow K'(\xi) = \frac{K(x)}{x}$$
.  
 Όμως για  $\xi > 0$  είναι  $K'(\xi) > 0 \Leftrightarrow \frac{K(x)}{x} > 0 \Leftrightarrow K(x) > 0 \Leftrightarrow G(x) - x > 0 \Leftrightarrow G(x) > x$ .  
 Άρα για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  ισχύει  $K(x) \geq 0 \Leftrightarrow G(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow G(x) \geq x$ .

**γ' τρόπος:** Αφού  $G$  δύο φορές παραγωγίσιμη θα είναι  $G'$  συνεχής οπότε: για κάθε  $t > 0$  ισχύει:

$$G'(t) > 1 \Leftrightarrow G'(t) - 1 > 0.$$

Άρα για  $x > 0$  θα είναι  $\int_0^x (G'(t) - 1)dt > 0 \Leftrightarrow [G(t) - t]_0^x > 0 \Leftrightarrow$   

$$\Leftrightarrow (G(x) - x) - (G(0) - 0) > 0 \Leftrightarrow G(x) > x.$$

Για  $x=0$  ισχύει προφανώς σαν ισότητα. Άρα  $G(x) \geq x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Δ2.** Γνωρίζουμε ότι η  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο  $[0, +\infty)$  οπότε η συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  θα είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. Δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} [F(x) \cdot \ln x] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{F(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\infty}{+\infty}}{\frac{-\infty}{F^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-F^2(x)}{x \cdot F'(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-F^2(x)}{x \cdot f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{F^2(x)}{x} \cdot \frac{-1}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{F^2(x)}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{f(x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2F(x) \cdot F'(x)}{1} \cdot \left( \frac{-1}{f(0)} \right) = 2F(0) \cdot f(0) \cdot (-1) = 0. \end{aligned}$$

Η σχέση  $f(\xi) \ln \xi + \frac{F(\xi)}{\xi} = 0$  γράφεται για  $\xi=x$ :

$$f(x) \ln x + \frac{F(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow (F(x) \cdot \ln x)' = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $H(x) = \begin{cases} F(x) \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  που είναι συνεχής στο

$[0,1]$  αφού είναι γινόμενο συνεχών στο  $(0,1]$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0 = H(0)$ . Ακόμη είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  σαν γινόμενο παραγωγίσιμων και είναι  $H(0) = 0 = H(1)$  αφού  $\ln 1 = 0$ .

Άρα από το θεώρημα του Rolle για την  $H(x)$  θα υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  ώστε

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \ln \xi + \frac{F(\xi)}{\xi} = 0.$$

**Δ3. α.** Έχουμε για κάθε  $x \geq 0$ :

$$f'(x)F(x) + f^2(x) = G''(x)[G(x) - x] + [G'(x) - 1]^2 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)F(x) + f(x) \cdot F'(x) = (G'(x) - 1)' \cdot [G(x) - x] + [G'(x) - 1] \cdot [G(x) - x]' \Leftrightarrow$$

$$(f(x) \cdot F(x))' = ((G'(x) - 1) \cdot [G(x) - x])' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot F(x) = (G(x) - x) \cdot (G'(x) - 1) + c.$$

Για  $x=0$  έχουμε:

$$f(0) \cdot F(0) = (G(0) - 0) \cdot (G'(0) - 1) + c \Leftrightarrow 1 \cdot 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Δηλαδή:

$$f(x) \cdot F(x) = (G(x) - x) \cdot (G'(x) - 1) \Leftrightarrow 2f(x) \cdot F(x) = 2(G(x) - x) \cdot (G'(x) - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2F'(x) \cdot F(x) = 2(G(x) - x) \cdot (G(x) - x)' \Leftrightarrow (F^2(x))' = ((G(x) - x)^2)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F^2(x) = (G(x) - x)^2 + c.$$

Για  $x=0$  έχουμε:

$$F^2(0) = (G(0) - 0)^2 + c \Leftrightarrow 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Δηλαδή  $F^2(x) = (G(x) - x)^2 \Leftrightarrow F(x) = G(x) - x$ , αφού είναι συνεχείς και

$F(x) \geq 0$  και  $G(x) \geq x$  για κάθε  $x \geq 0$  από το ερώτημα Δ1.

β. Η εφαπτομένη της  $C_F$  στο  $(x_0, F(x_0))$  έχει εξίσωση

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f(x_0)(x - x_0) + F(x_0) \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της  $C_G$  στο  $(x_0, G(x_0))$  έχει εξίσωση

$$y - G(x_0) = G'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = G'(x_0)(x - x_0) + G(x_0) \quad (2)$$

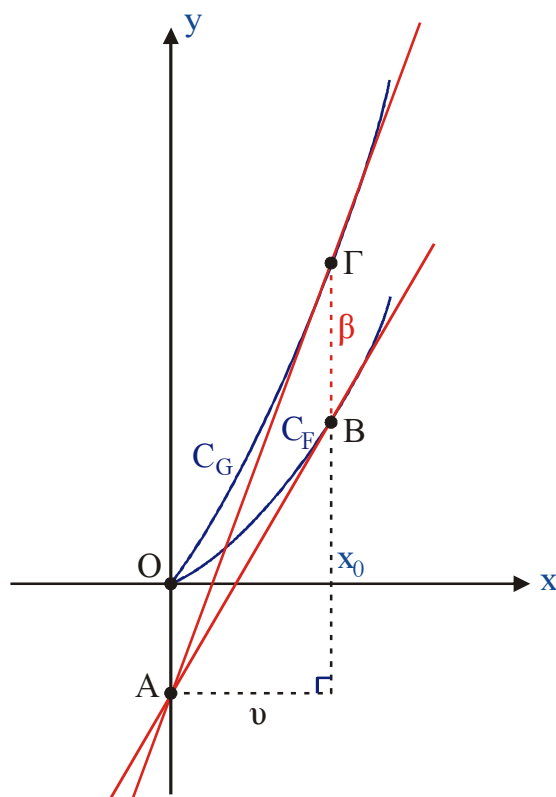
Λύνοντας το (Σ) των εξισώσεων (1) και (2) έχω:

$$\begin{aligned} f(x_0)(x - x_0) + F(x_0) &= G'(x_0)(x - x_0) + G(x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (G'(x_0) - 1) \cdot (x - x_0) + G(x_0) - x_0 &= G'(x_0)(x - x_0) + G(x_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow G'(x_0) \cdot x - G'(x_0) \cdot x_0 - x + x_0 - x_0 &= G'(x_0) \cdot x - G'(x_0) \cdot x_0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

δηλαδή οι εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο Α του άξονα  $y'y$ .

Επειδή για  $x=0$  έχουμε  $F(0) = G(0) - 0 \Leftrightarrow F(0) = G(0)$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις  $C_F$ ,  $C_G$  και την ευθεία  $x=x_0$  θα είναι

$$E = \int_0^{x_0} |F(x) - G(x)| dx = \int_0^{x_0} |-x| dx = \int_0^{x_0} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{x_0} = \frac{x_0^2}{2}.$$





Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \nu.$$

Το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής  $A$ , που είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, από την πλευρά  $B\Gamma$  που είναι η ευθεία  $x=x_0$ . Αφού είναι σημείο του άξονα  $y'y$ , η απόσταση θα είναι  $|x_0|$ .

Σαν βάση θεωρούμε την πλευρά  $B\Gamma$ , που σχηματίζουν τα σημεία  $B(x_0, F(x_0))$  και  $\Gamma(x_0, G(x_0))$ , οπότε  $(B\Gamma) = |F(x_0) - G(x_0)| = |x_0|$

δηλαδή  $E = \frac{1}{2} |x_0| \cdot |x_0| = \frac{1}{2} \cdot |x_0|^2 = \frac{1}{2} x_0^2$ , άρα ισχύει το ζητούμενο.