

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία:** Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2013

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι, αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 9**

**A2. α.** Πότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 3**

**β.** Αν  $f, g$  συναρτήσεις με πεδίο ορισμού  $A, B$  αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$  και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**A3.** Να χαρακτηρίστε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$  τότε, ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες γράφεται

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta$$

**β)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|^v = |z^v|$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $1-1$ , είναι γνησίως μονότονη.

**δ)** Αν  $0 < a < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ .

**ε)** Για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$  η συνάρτηση  $f(x) = x^{-v}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = -vx^{-v-1}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\bar{z}(z+2) = -|1-i|^2 \cdot z - 3 \quad \text{και} \quad w = 2z - i,$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$ . Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $\bar{z}$ ;

**Μονάδες 7**

- B2.** Να βρείτε την μέγιστη τιμή του  $|z - \bar{z}|$  και τις τιμές του  $z$  για τις οποίες επιτυγχάνεται.

**Μονάδες 6**

- B3.** Αν για τους μιγαδικούς  $z$  των προηγούμενων ερωτημάτων ισχύει  $|z - \bar{z}| = 2$  και  $\operatorname{Im}(z) > 0$ , τότε να υπολογίσετε την τιμή του  $\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)^{2013}$ .

**Μονάδες 6**

- B4.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $w$  και να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των  $z$  και  $w$  είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του  $z$  από το σημείο  $A(0,1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \ln a, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ .

- Γ1.** Βρείτε τον  $a \in (0, +\infty)$  ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη και δείξτε ότι  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ .

**Μονάδες 7**

Έστω  $a = e$ .

- Γ2.** α. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, εφόσον υπάρχουν.

**Μονάδες 6**

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2x - \int_0^x \frac{1}{f(t)+1} dt = \frac{1}{2013}$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$ ,  $G$  και  $F$ , οι οποίες είναι ορισμένες στο διάστημα  $[0, +\infty)$  με  $f$  παραγωγίσιμη και  $G$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα.

Έστω ότι ισχύουν:  $f(0) = 1$ ,  $G(0) = 0$  και για κάθε  $x \geq 0$

$$\text{είναι } f'(x) > 0, \quad G'(x) > 1 \quad \text{και} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $F(x) \geq 0$  και  $G(x) \geq x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} [F(x) \ln x]$  και να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) \ln \xi + \frac{F(\xi)}{\xi} = 0$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Δίνεται, επιπλέον, ότι

$$f'(x) F(x) + f^2(x) = G''(x)[G(x) - x] + [G'(x) - 1]^2, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $F(x) = G(x) - x$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

**Μονάδες 7**

**β.** Για κάθε  $x_0 > 0$ , οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων  $C_F, C_G$  στα σημεία τους  $B(x_0, F(x_0))$  και  $\Gamma(x_0, G(x_0))$  αντιστοίχως, τέμνονται σε σημείο  $A$  του άξονα  $y'y$  (**μονάδες 3**) και το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισεμβαδικό με το χωρίο, που ορίζεται από τις  $C_F, C_G$  και την ευθεία  $x = x_0$  (**μονάδες 3**).

**Μονάδες 6**