

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
/ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 151.
A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 14.
A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 84 (Τα μέτρα θέσης μας δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα μέτρα διασποράς την διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους.
A4. $\alpha \rightarrow \Lambda, \beta \rightarrow \Sigma, \gamma \rightarrow \Sigma, \delta \rightarrow \Lambda, \epsilon \rightarrow \Lambda.$

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 250 θα είναι $v=250$ όπου v το πλήθος των συνταξιούχων του δείγματος.

Το πλάτος c κάθε μιας από τις 5 κλάσεις θα είναι $\frac{R}{5} = \frac{20}{5} = 4.$

Αφού το μέσο της δεύτερης κλάσης έχει τετμημένη 10 θα είναι $x_2=10$ και αν η πρώτη κλάση είναι $[κ, κ+c)$ η δεύτερη θα είναι $[κ+c, κ+2c)$ και θα είναι:

$$x_2 = \frac{\kappa + c + \kappa + 2c}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{\kappa + 4 + \kappa + 8}{2} \Leftrightarrow 2\kappa + 12 = 20 \Leftrightarrow \kappa = 4.$$

Αφού $f_2\% = a$ θα είναι σύμφωνα με τα δεδομένα

$$f_1\% = 3a, f_3\% = \frac{a}{2}, f_4\% = \frac{3a}{10}, f_5\% = \frac{a}{5}.$$

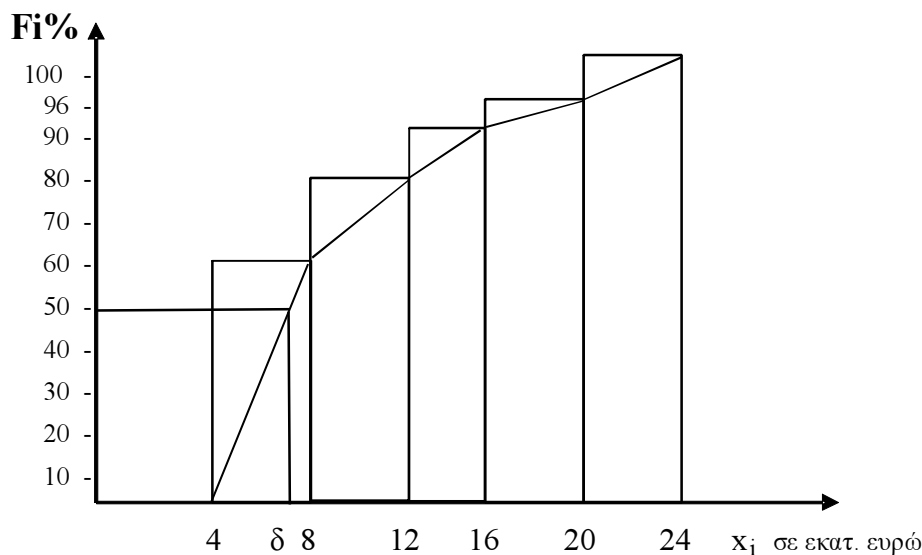
$$\text{Όμως } f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 3a + a + \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} + \frac{a}{5} = 100 \Leftrightarrow a = 20.$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων γράφεται:

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$	f_i	v_i	N_i	$F_i\%$	F_i	$x_i \cdot v_i$
[4-8)	6	60	0,60	150	150	60	0,60	900
[8-12)	10	20	0,20	50	200	80	0,80	500
[12-16)	14	10	0,10	25	225	90	0,90	350
[16-20)	18	6	0,06	15	240	96	0,96	270
[20-24)	22	4	0,04	10	250	100	1	220
ΣΥΝΟΛΑ		100	1	250				2240

Για τις συχνότητες v_i χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $v_i = f_i \cdot v$.

- B2.** Για τη μέση τιμή των συντάξεων έχουμε $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{2240}{250} = 8,96$ εκατοντάδες ευρώ, δηλαδή 896 ευρώ.
Για την εύρεση της διαμέσου των συντάξεων σχηματίζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.



Από αυτό έχουμε $\frac{\delta - 4}{8 - 4} = \frac{50 - 0}{60 - 0} \Leftrightarrow \delta - 4 = \frac{4 \cdot 5}{6} \Leftrightarrow \delta \approx 4 + 3,33 \approx 7,33$.

Αφού $\bar{x} > \delta$ η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

- B3.** Πάνω από 1300 ευρώ δηλαδή από 13 εκατοντάδες είναι τα $\frac{16-13}{16-12}$ της 3^{ης} κλάσης και όλοι που είναι στην 4^η και στην 5^η κλάση, δηλαδή ποσοστό $\left(\frac{3}{4} \cdot 10 + 6 + 4\right)\% = 17,5\%$ δηλαδή $\frac{17,5}{100} \cdot 2850000 = 498750$ συνταξιούχοι.
- B4.** Μέγιστο ετήσιο εισόδημα 8640 ευρώ σημαίνει ότι το μέγιστο μηνιαίο εισόδημα είναι $\frac{8640}{12} = 720$ ευρώ, δηλαδή 7,2 εκατοντάδες ευρώ.
- i. Από 4-7,2 εκατοντάδες ευρώ ανήκουν $\frac{7,2-4}{8-4} = \frac{3,2}{4} = 0,80 = 80\%$ των συνταξιούχων της πρώτης κλάσης, δηλαδή ποσοστό $0,80 \cdot 60 = 48\%$ του συνόλου των συνταξιούχων. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 48%.
- ii. Το ποσό που θα αφαιρεθεί από τις ανώτερες κλάσεις του δείγματος ανά μήνα είναι $100 \cdot 25 + 200 \cdot 15 + 400 \cdot 10 = 2500 + 3000 + 4000 = 9500$ ευρώ και θα διανεμηθεί σε $\frac{80}{100} \cdot 150 = 120$ της 1^{ης} κλάσης. Άρα καθένας από τους δικαιούχους θα πάρει $\frac{9500}{120} = 79,16$ ευρώ ανά μήνα.

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Για την $f(x)$ πρέπει να ισχύουν: ($x \geq 0$ και $x - 4 \neq 0$). Άρα $A_f = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.
Για την $g(x)$ πρέπει να ισχύουν: ($x > 0$ και $x \geq 0$) δηλαδή $x > 0$. Άρα $A_g = (0, +\infty)$.

Γ2.
$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3\sqrt{x} - 6}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{3}{4} = P(A).$$

Είναι:
$$g'(x) = \frac{2P(B)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{16} \cdot 2x = \frac{2P(B)}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{8}$$

οπότε
$$g'(4) = \frac{2P(B)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{8}.$$

Αν $\omega = \frac{\pi}{4}$ τότε

$$\varepsilon\phi\omega = \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = 1 = g'(4) \Leftrightarrow \frac{2P(B)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2P(B)}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}.$$

Γ3. α Αν $P(A \cap B) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = P(B)$ άτοπο γιατί $(A \cap B) \subseteq B$.

$$\text{Αν } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ τότε } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{13}{12} > 1 \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

β $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) = \\ = P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}.$

γ. $P[(A - B) \cup (B - A)] = \\ = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{15}{20} + \frac{10}{20} - \frac{16}{20} = \frac{9}{20}.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x \cdot (x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
-4x	+		+	○	-		-	
x ² -1	+	+	○	-	-	○	+	
f'(x)	+	+	○	-	○	+	○	-
f(x)		↗	↘	↗	↘			

Άρα η $f \uparrow (-\infty, -1]$, $f \downarrow [-1, 0]$, $f \uparrow [0, 1]$, $f \downarrow [1, +\infty)$.

Έχει τοπικό μέγιστο για $x_1 = -1$ το $f(-1) = 2$ και για $x_3 = 1$ το $f(1) = 2$ και τοπικό ελάχιστο για $x_2 = 0$ το $f(0) = 1$.

- Δ2. i) Είναι: $0 \leq P(B) \leq 1$ και $f \uparrow$ στο $[0,1]$.
 Συνεπώς: $f(0) \leq f(P(B)) \leq f(1) \Leftrightarrow 1 \leq P(A) \leq 2$ και $0 \leq P(A) \leq 1$ και
 αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα $P(A)=1$ και $A=\Omega$.

Ακόμα:

$$f(P(B)) = P(A) \Leftrightarrow -P^4(B) + 2P^2(B) + 1 = 1 \Leftrightarrow P^2(B) \cdot (2 - P^2(B)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$P(B) = 0 \text{ ή } P(B) = \pm\sqrt{2} \text{ απορ. αφού } 0 \leq P(B) \leq 1$$

Άρα $P(B)=0$ και $B = \emptyset$.

- Δ2. ii. α)

- $\Gamma \neq A = \Omega$ και $\Gamma \neq B = \emptyset$

Άρα:

$$0 < P(\Gamma) < 1 \Leftrightarrow 0 < 2P(\Gamma) < 2 \Leftrightarrow 0 < v_1 < 2 \text{ και } v_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow v_1 = 1,$$

$$\text{οπότε } P(\Gamma) = \frac{1}{2}$$

- $\Delta \neq \Omega, \emptyset$ και $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Gamma \neq \Delta$

Άρα:

$$P(\Gamma) < P(\Delta) < 1 \Leftrightarrow 4P(\Gamma) < 4P(\Delta) < 4 \Leftrightarrow 2 < v_2 < 4 \text{ και } v_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow v_2 = 3,$$

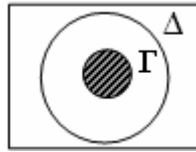
$$\text{οπότε } P(\Delta) = \frac{3}{4}.$$

Συνεπώς:

x_i	v_i
1	1
2	3
3	5
4	1
	$v=10$

β)
$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$$

γ) Είναι $\Gamma \cap \Delta = \Gamma$
 οπότε $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$



και $\Gamma \cup \Delta = \Delta$ οπότε $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Delta) = \frac{3}{4}$

