



Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)

B. α. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)

Γ. α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

A. Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έτσι $A = \mathbb{R}$

B. α. $f'(x) = (\ln(x^2 + 1) + x + \sqrt{a+15})' = \frac{2x}{x^2+1} + 1 = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$

β. $\lim_{x \rightarrow -1} \left[f'(x) \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x-2) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-1+1}{-1-2} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Γ. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την C_f .

$$\text{Αφού } (\varepsilon) // (\eta) \text{ πρέπει: } f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 + 1 \Rightarrow$$

$$2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$$

Αφού $f(0) = \ln 1 + \sqrt{a+15} = \sqrt{a+15}$, το σημείο επαφής είναι $M(0, \sqrt{a+15})$

Έτσι $(\varepsilon): y = f'(0) \cdot x + \beta$ δηλαδή $(\varepsilon): y = x + \beta$

Όμως $M \in (\varepsilon) \Rightarrow \sqrt{a+15} = 0 + \beta \Rightarrow \beta = \sqrt{a+15}$ έτσι $(\varepsilon): y = x + \sqrt{a+15}$.

A. για $x_1 = 0$ έχω $y_1 = \sqrt{a+15}$

για $x_2 = 1$ έχω $y_2 = 1 + \sqrt{a+15}$

για $x_3 = 9$ έχω $y_3 = 9 + \sqrt{a+15}$

για $x_4 = 10$ έχω $y_4 = 10 + \sqrt{a+15}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$$\sqrt{a+15}, \sqrt{a+15} + 1, \sqrt{a+15} + 9, \sqrt{a+15} + 10$$

$$\delta = \frac{\sqrt{a+15} + 1 + \sqrt{a+15} + 9}{2} = \frac{2\sqrt{a+15} + 10}{2} = \sqrt{a+15} + 5$$

$$\text{Αφού } \delta = 50 \Rightarrow \sqrt{a+15} + 5 = 50 \Rightarrow \sqrt{a+15} = 45 \Rightarrow a + 15 = 2025 \Rightarrow a = 2010$$

ΘΕΜΑ 3

A. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n , έτσι $n = 50$.

B. Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

Κλάσεις [-)	x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
0 - 4	2	4	0,08	8	4	0,08	8
4 - 8	6	7	0,14	14	11	0,22	22
8 - 12	10	18	0,36	36	29	0,58	58
12 - 16	14	13	0,26	26	42	0,84	84
16 - 20	18	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο	—	$v = 50$	1	100			

$$\text{Αφού } v = 50 \Rightarrow N_4 + v_5 = 50 \Rightarrow 6v_2 + 8 = 50 \Rightarrow 6v_2 = 42 \Rightarrow v_2 = 7$$

$$N_4 = 42 \Rightarrow 4 + 7 + 18 + v_4 = 42 \Rightarrow v_4 = 13$$

Γ. α. A: «ο μαθητής έχει βαθμό από 10 έως 17» τότε

$$N(A) = \frac{1}{2} \cdot v_3 + v_4 + \frac{1}{4} \cdot v_5 = 9 + 13 + 2 = 24 \text{ οπότε}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{50} = 0,48 \text{ ή } 48\%$$

β. B: «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από 10 ή τουλάχιστον 16»

$$N(B) = v_1 + v_2 + \frac{1}{2} v_3 + v_5 = 4 + 7 + 9 + 8 = 28. \text{ Έτσι}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{28}{50} = 0,56 \text{ ή } 56\%$$

ΘΕΜΑ 4

A. Έχουμε : $2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(k) = \frac{P(\lambda)}{2} = \theta \in R$

$$\text{Αφού } P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta + 2\theta + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(\mu) = \frac{1}{2} - 3\theta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(2) + P(3) + P(6) + P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) \stackrel{(1)}{=} 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\theta}{2} + 3\theta + \theta + \theta + 2\theta + \frac{1}{2} - 3\theta = 1 \Rightarrow$$

$$4\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{Έτσι : } P(2) = \frac{1}{18}, P(3) = \frac{1}{3}, P(6) = \frac{1}{9}, P(\kappa) = \frac{1}{9}, P(\lambda) = \frac{2}{9}, P(\mu) = \frac{1}{6}$$

B. $f'(x) = \lambda x^2 - 24x + 20$

$$\text{Αφού } \eta(\epsilon) // (\eta) \Rightarrow f'(-1) = 48 \Rightarrow \lambda + 44 = 48 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$\text{Έτσι } f'(x) = 4x^2 - 24x + 20$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 20 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

Άρα $\kappa = 1$ και $\mu = 5$

Έτσι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\Gamma. \text{ πρέπει } \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{2x - 3} - \sqrt{5} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ \sqrt{2x - 3} \neq \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ 2x - 3 \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

και αφού $x \in \Omega$ άρα: $x = 2$ ή $x = 3$ ή $x = 5$ ή $x = 6$

έτσι $B = \{2, 3, 5, 6\}$

$$\Delta. \text{ Οι 4 παρατηρήσεις είναι τα } \frac{4}{160} = \frac{1}{40} = 2,5\% \text{ του συνόλου των παρατηρήσεων.}$$

Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: $\bar{x} + 2s = 20$ (1)

$$\text{Όμως } R = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s = 3\bar{x} \quad (2)$$

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 24s = 3(20 - 2s) \Rightarrow 24s = 60 - 6s \Rightarrow 30s = 60 \Rightarrow s = 2$$

Έτσι από (1) $\Rightarrow \bar{x} + 4 = 20 \Rightarrow \bar{x} = 16$

Παρατηρούμε ότι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$, έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό c σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω: $s' = s = 2$ και $\bar{x}' = \bar{x} + c = 16 + c$.

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$$CV' \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16 + c} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$20 \leq 16 + c \Rightarrow c \geq 4 \text{ και αφού } c \in \Omega \text{ έχω: } c = 4 \text{ ή } c = 5 \text{ ή } c = 6$$

Έτσι $\Gamma = \{4, 5, 6\}$

$$E. \text{ Έχουμε: } A \cap \Gamma = \{4, 5\}$$

$$B - \Gamma = \{2, 3\}$$

$$A \cup \Gamma = \{1, 4, 5, 6\}$$

$$B \cup A' = \{2, 3, 5, 6\}, \text{ αφού } A' = \{2, 3, 6\}$$

$$\text{Έτσι } P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

$$P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$

$$P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

$$P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}$$