



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### Θέμα 1<sup>ο</sup>

- Β. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό  
4. Λάθος 5. Λάθος 6. Σωστό

### Θέμα 2<sup>ο</sup>

$$\alpha) f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + a)e^{-x} = (2x - x^2 - a)e^{-x} = (-x^2 + 2x - a)e^{-x}$$

$$f(0) = a \text{ και } f'(0) = -a$$

$\varepsilon : y - a = -ax \Leftrightarrow y = -ax + a$  η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$M(0, f(0))$ . Ταυτίζεται με την  $y = -2x + 2$  όταν  $-a = -2$  και  $a = 2$

δηλαδή όταν  $a = 2$ .

- β) Για  $a = 2$  είναι  $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$  και  $f'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x} < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  διότι  $-x^2 + 2x - 2 < 0$  και  $e^{-x} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 2)e^{-x}] = +\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2) \cdot e^{-x}] \stackrel{(+\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

- δ) Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της  $f(x)$  είναι  $f(A) = (0, +\infty)$  το οποίο περιέχει το 2007. Η  $f(x) \downarrow$  στο  $\mathbb{R}$ , άρα η εξίσωση  $f(x) = 2007$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**Θέμα 3ο**

$$\alpha) |z + w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 0 \stackrel{(1)}{=} z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0$$

β) Ισχύει  $z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 0 \Leftrightarrow$  (ερώτημα (α))  $z \cdot \bar{w} = -\bar{z} \cdot w$ . Διαιρούμε με

$$w \bar{w} = |w|^2 \text{ και έχουμε } \frac{z}{w} = -\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \text{ που σημαίνει ότι } \frac{z}{w} \text{ φανταστικός.}$$

γ) Αν  $A, B$  οι εικόνες των  $z, w$  τότε  $(OA) = |z|, (OB) = |w|$  και

$$(AB) = |z - w|.$$

$$\text{Αρκεί ότι } (OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0 \text{ ισχύει.}$$

**β' μέθοδος**

Η ισότητα  $|z + w| = |z - w|$  γράφεται ισοδύναμα  $|\overline{OA} + \overline{OB}| = |\overline{OA} - \overline{OB}| \Leftrightarrow$

$$(\overline{OA} + \overline{OB})^2 = (\overline{OA} - \overline{OB})^2 \Leftrightarrow$$

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \text{ Άρα } \angle AOB = 90^\circ$$

**γ' μέθοδος**

Αν  $\Gamma$  η 4η κορυφή του παραλληλόγραμμου με πλευρές  $OA$  και  $OB$ , τότε

$$(O\Gamma) = |z + w| \text{ και } (AB) = |z - w| \text{ επειδή } |z + w| = |z - w| \text{ είναι}$$

$$(O\Gamma) = (AB). \text{ Επομένως } OAGB \text{ ορθογώνιο.}$$

δ) Είναι

$$z \cdot \bar{w} = [a + i \cdot f(a)][f(\beta) + \beta i] = a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) + [a \cdot \beta + f(a)f(\beta)]i$$

$$\text{οπότε } \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta}.$$



Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο  $(a, \beta)$  η εξίσωση

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{x} \right)' = 0. \text{ Εφαρμόζεται το } \Theta. \text{ Rolle για}$$

$$\text{την } h(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ στο } [a, \beta], \text{ άρα υπάρχει } x_0 \in (a, \beta) \dots$$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

$$\alpha) g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ και } g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g''(x)$	+		-
$g(x)$			

Σ. Κ.

β) Για  $x = 0$  είναι  $0 \leq g(0) \leq 0$ . Ισχύει η ισότητα

Για κάθε  $x > 0$  εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο  $[0, x]$  οπότε υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιος ώστε } g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x} \text{ Έχουμε}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \leq g'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow g'(x) \leq g'(\xi) \leq g'(0). \text{ Ισχύει διότι } g'(x) \downarrow \text{ στο } [0, +\infty) \text{ και}$$

$$0 < \xi < x \text{ (ερώτημα α)}$$

**β' μέθοδος**

Θα αποδείξουμε ότι:

$$g(x) \geq \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \geq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{x}{1+x^2}, x \geq 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 1+x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } h \text{ συνεχής στο } [0, +\infty). \text{ Άρα}$$

$$h(x) \uparrow \text{ στο } [0, +\infty). \text{ Επομένως για κάθε } x \geq 0 \text{ ισχύει } h(x) \geq h(0) = 0.$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι :  $g(x) \leq x$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ .

$$\gamma) \text{ Έστω } h(x) = g(x) + g(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\text{Είναι } h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \text{ άρα } h(x) = c$$

Για  $x = 0$  είναι  $h(0) = 0$ . Επομένως  $h(x) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathfrak{R}$ .

**β' μέθοδος**

$$\text{Είναι } g(x) + g(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Στο  $g(-x)$  θέτουμε  $t = -u$  τότε  $dt = -du$

*Άκρα ολοκλήρωση*

Για  $t = 0, u = 0$  και για  $t = 0, u = x$ .

$$\text{Άρα } g(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = -\int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$$

Επομένως ...

δ) Αφού  $f(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$  τότε  $g(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt > 0$ . Άρα

$$E = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x' \cdot g(x) dx = [x \cdot g(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x) dx =$$

$$= g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = g(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(1+x^2))' dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2 \text{ τ.μ.}$$