



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν για μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$  ισχύει  $f(x) \leq \kappa$  όπου  $\kappa \in \mathfrak{R}$  για κάθε  $x \in A$ , τότε το  $\kappa$  είναι η μέγιστη τιμή της  $f$ .
2. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε υπάρχει το όριο της  $f(x)$  στο  $x_0$  και είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .
3. Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f(a) \cdot f(\beta) < 0$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ .
4. Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  συνεχείς στο διάστημα  $\Delta$  ισχύει  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .
5. Αν για μια συνάρτηση  $f$  υπάρχει παράγουσα στο διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $\lambda \in \mathfrak{R}$  ισχύει:  $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$ .
6. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[a, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε  $\int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx$ .

Μονάδες 12

**Θέμα 2°**

Εστω η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{-x}$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ . Αν η ευθεία  $y = -2x + 2$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $M(0, f(0))$  τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:  $a = 2$ .

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της  $f$ .

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2007$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $\mathfrak{R}$ .

Μονάδες 6

**Θέμα 3°**

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z, w$  με  $z \cdot w \neq 0$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0.$$

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός  $\frac{z}{w}$  είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των  $z, w$  στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή  $O$  των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο  $O$ .

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  με  $0 < a < \beta$  και

$$z = a + i \cdot f(a), w = f(\beta) - \beta i \quad \text{τότε η εξίσωση} \quad x \cdot f'(x) = f(x)$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο  $(a, \beta)$ .

Μονάδες 7

**Θέμα 4°**

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$  όπου  $t, x \in \mathfrak{R}$ .

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση  $g$ .

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{x}{1+x^2} \leq g(x) \leq x$  για κάθε  $x \geq 0$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι:  $g(x) + g(-x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathfrak{R}$ .

Μονάδες 6

- δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  είναι  $E = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2$  τ.μ.

Μονάδες 8

*Καλή Επιτυχία στις Γενικές εξετάσεις*