



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 9

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\ll 1 - 1 \gg$ αν και μόνο αν για κάθε

$x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 .

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.

5. Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο

$[a, \beta]$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2)$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

Μονάδες 8

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$

και $x = e^2$.

Μονάδες 10**Θέμα 3^ο**

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x - 1)i$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός

$w = z^2 + z + 2i$ να είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 9**Θέμα 4^ο**

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = \frac{1}{2}$

και $e^x [f(x) + f'(x)] + \eta \mu x = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$f(x) + f(-x) = \sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι: $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6