



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1^ο Θέμα

- A. i) Σχολ. βιβλίο σελ. 16
ii) Σχολ. βιβλίο σελ. 13
- B. Σχολικό βιβλίο σελ. 65
- Γ. 1 (Λ), 2 (Σ), αφού για $i=5$, είναι $N_5 = v \Leftrightarrow v = 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 110$
3 (Λ), 4 (Σ), 5 (Λ)

2^ο Θέμα

α) Για $x \neq 4$ είναι:

$$F(x) = \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2)$$

β) Η F είναι συνεχής,

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 4} F(x) = F(4) \stackrel{\text{α. ερωτ.}}{\Leftrightarrow} \lim_{\text{κ' υποθ. } x \rightarrow 4} (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2) = -24 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t} - 2s)(\sqrt{4} + 2) = -24 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} - 2s = -6 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} = -4 \cdot s \quad (\text{είναι } s > 0, \text{ άρα } \bar{t} < 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{-\bar{t}} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{t}|} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow CV = 0,25 = 25\%.$$

Επομένως, το δείγμα των τιμών t_1, t_2, \dots, t_{100} της μεταβλητής T δεν είναι ομοιογενές.

- γ) Η g ορίζεται στο $[0, +\infty)$ αφού $\bar{t} - 2s \stackrel{\beta. \text{ερωτ.}}{=} -4 \cdot s - 2 \cdot s = -6 \cdot s \neq 0$ (από υπόθεση)
Για $x \neq 4$ είναι

$$g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s} \stackrel{\alpha. \text{ερωτ.}}{=} \frac{(\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2)}{\bar{t} - 2s} = \sqrt{x} + 2$$

και

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

οπότε έχουμε

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \quad \text{και} \quad g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1 \quad (1).$$

Η εφαπτομένη (ε): $y = \lambda x + \beta$ στο A έχει $\lambda = g'\left(\frac{1}{4}\right)$, έτσι γίνεται:

$$y = g'\left(\frac{1}{4}\right) x + \beta \Leftrightarrow y = x + \beta.$$

Επειδή το $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ ανήκει στην (ε): $y = x + \beta$, είναι $\frac{5}{2} = \frac{1}{4} + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{9}{4}$,

επομένως

$$(\varepsilon): y = x + \frac{9}{4}$$

3^ο Θέμα

- α) Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. είναι

$$\frac{100}{4.000} \cdot 100\% = 2,5\%.$$

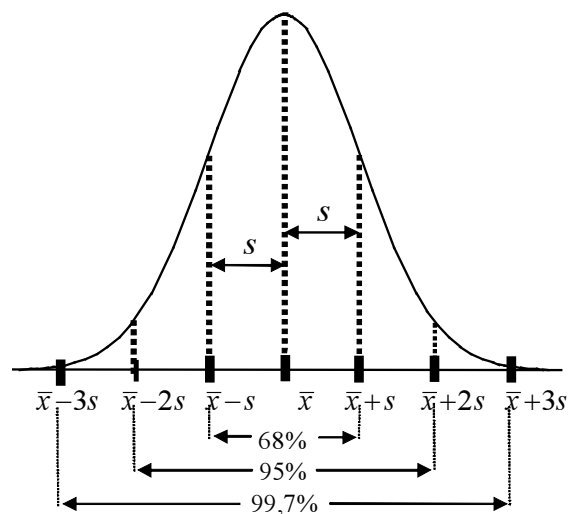
Όμως $2,5\% = \frac{100\% - 95\%}{2}$ είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $\bar{x} - 2s$.

Άρα

$$\bar{x} - 2s = 1.400 \quad (1)$$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ. είναι

$$\frac{3.360}{4.000} \cdot 100\% = 84\%.$$



Όμως $84\% = 100\% - \frac{100\% - 68\%}{2}$ είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $\bar{x} + s$.

Άρα

$$\bar{x} + s = 2000 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) δίνουν το σύστημα

$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 1400 \\ \bar{x} + s = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 200 \\ \bar{x} = 1800 \end{cases}$$

Ώστε: $\bar{x} = 1.800\text{κ.εκ.}$, $s = 200\text{κ.εκ.}$ και, τέλος, $R \cong 6 \cdot s = 1.200\text{κ.εκ.}$.

β) Έστω τα ενδεχόμενα:

A: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ.

B: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Ζητάμε την πιθανότητα $P(A \cup B)$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $1200\text{κ.εκ.} = \bar{x} - 3s$

είναι $\frac{100\% - 99,7\%}{2} = 0,15\%$ ενώ αυτό των αυτοκινήτων με κυβισμό

μεγαλύτερο από $2000\text{κ.εκ.} = \bar{x} + s$ είναι $\frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%$. Επομένως

$$P(A) = 0,15\% \quad \text{και} \quad P(B) = 16\%$$

Επειδή, προφανώς, τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,15\% + 16\% = 16,15\%$$

γ) Έστω y_i , $i=1,2,3,\dots,4000$, ο κυβισμός των κινητήρων μετά την επισκευή.

Είναι $y_i = x_i + 0,06x_i = 1,06x_i$, $i=1,2,3,\dots,4000$, οπότε (βλέπε εφαρμογή 3 σελίδα 99 σχολικού βιβλίου)

$$\bar{y} = 1,06\bar{x} = 1,06 \cdot 1800 = 1908\text{κ.εκ}$$

και

$$s_y = 1,06s_x = 1,06 \cdot 200 = 212\text{κ.εκ.}$$

άρα

$$s_y^2 = 212^2 = 44944 \text{ (κ.εκ.)}^2$$

Το εύρος των νέων τιμών βρίσκεται ως εξής: Αν μ_x , M_x είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα από τις τιμές x_i , $i=1,2,3,\dots,4000$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\mu_x \leq x_i \leq M_x$$

$$1,06\mu_x \leq 1,06x_i \leq 1,06M_x$$

$$1,06\mu_x \leq y_i \leq 1,06M_x \quad \text{για κάθε } i=1,2,3,\dots,4000$$

Έτσι, η μικρότερη μ_y και η μεγαλύτερη M_y από τις τιμές $y_i, i=1,2,3,\dots,4000$, είναι

$$\mu_y = 1,06 \mu_x$$

$$M_y = 1,06 M_x$$

και το εύρος R_y είναι:

$$R_y = M_y - \mu_y = 1,06 M_x - 1,06 \mu_x = 1,06 (M_x - \mu_x) = 1,06 R \cong 1,06 \cdot 1200 = 1272 \text{ κ.εκ.}$$

4° Θέμα

α) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πολυωνυμική) με

$$f'(x) = -[x - P(\Lambda)] + P(K) = P(\Lambda) + P(K) - x.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x = 0 \Leftrightarrow x = P(\Lambda) + P(K).$$

Ακόμα:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x > 0 \Leftrightarrow x < P(\Lambda) + P(K) \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x < 0 \Leftrightarrow x > P(\Lambda) + P(K)$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, P(\Lambda) + P(K)]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[P(\Lambda) + P(K), +\infty)$, και παρουσιάζει μέγιστο στο $x = x_0$ με $x_0 = P(\Lambda) + P(K)$.

i) Για την μέγιστη τιμή έχουμε:

$$f(x_0) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow f(P(K) + P(\Lambda)) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} [P(K) + P(\Lambda) - P(\Lambda)]^2 + [P(K) + P(\Lambda)] P(K) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} [P(K)]^2 + [P(K)]^2 + P(K) P(\Lambda) = \frac{5}{2} [P(K)]^2 \Leftrightarrow$$

$$P(K) P(\Lambda) = 2 [P(K)]^2 \stackrel{P(K) \neq 0}{\Leftrightarrow} P(\Lambda) = 2P(K)$$

β) i) Ισχύουν:

$$\emptyset \subseteq K \cap \Lambda \subseteq K \text{ και } \Lambda \subseteq K \cup \Lambda \subseteq \Omega$$

επομένως

$$P(\emptyset) \leq P(K \cap \Lambda) \leq P(K) \text{ και } P(\Lambda) \leq P(K \cup \Lambda) \leq P(\Omega).$$

Ακόμα

$$P(K) < P(\Lambda) \quad (\text{από ερώτημα (α) (ii)})$$

Επομένως, αν διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις, έχουμε:

$$P(\emptyset), P(\emptyset), P(K \cap \Lambda), P(K), P(K), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega).$$

Η διάμεσος αυτών των 10 παρατηρήσεων είναι το ημίαθροισμα της 5^{ης} και 6^{ης} παρατήρησης: $\delta = \frac{P(K) + P(K)}{2} = P(K)$

Έτσι

$$P(K) = \delta = \frac{1}{4}$$

Ακόμα

$$P(\Lambda) = 2P(K) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Επειδή τα ενδεχόμενα $K-\Lambda$ και $\Lambda-K$ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων, έχουμε:

$$\begin{aligned} P[(K-\Lambda) \cup (\Lambda-K)] &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(K-\Lambda) + P(\Lambda-K) = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow P(K) - P(K \cap \Lambda) + P(\Lambda) - P(\Lambda \cap K) = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow P(K) + P(\Lambda) - 2P(K \cap \Lambda) = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2P(K \cap \Lambda) = \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow P(K \cap \Lambda) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

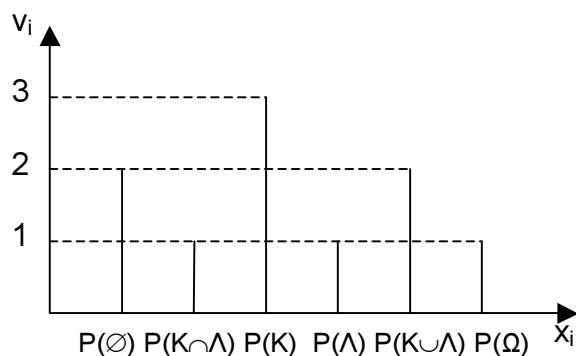
Τέλος:

$$P(K \cup \Lambda) = P(K) + P(\Lambda) - P(K \cap \Lambda) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$$

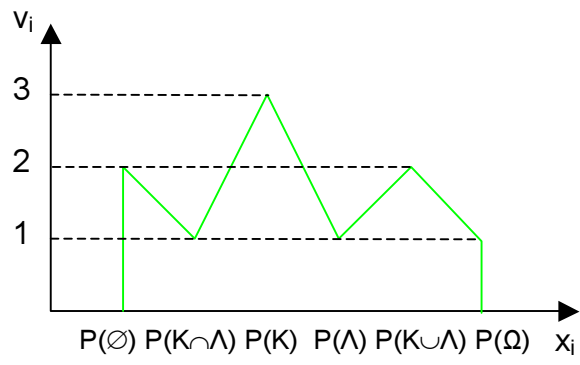
ii) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

x_i	$P(\emptyset)$	$P(K \cap \Lambda)$	$P(K)$	$P(\Lambda)$	$P(K \cup \Lambda)$	$P(\Omega)$
v_i	2	1	3	1	2	1

κατασκευάζουμε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων (διακριτή μεταβλητή).



Διάγραμμα
συχνοτήτων



Πολύγωνο
συχνοτήτων