



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** i) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της A . *Μονάδες 2*
ii) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 3*
- B.** Να γράψετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες που ισχύουν για την σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1,2,\dots,k$ του δείγματος μεγέθους $n \geq k$, των τιμών μιας μεταβλητής X . *Μονάδες 10*
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις.
1. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. *Μονάδες 2*
 2. Αν για τις αθροιστικές συχνότητες N_i , $i=1,2,3,4,5$ ενός δείγματος τιμών x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 της μεταβλητής X , ισχύει $N_i = 4 \cdot i^2 + 2i$, τότε το μέγεθος του δείγματος είναι $n=110$. *Μονάδες 2*
 3. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος ισούται με την διαφορά της κεντρικής τιμής της πρώτης κλάσης από την κεντρική τιμή της τελευταίας κλάσης. *Μονάδες 2*
 4. Σε κανονική κατανομή ισχύει: $\bar{x} = \delta$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή και δ η διάμεσος της. *Μονάδες 2*
 5. Αν για τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ δύο ενδεχομένων A , B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι $P(A) \leq P(B)$ τότε ισχύει πάντα $A \subseteq B$. *Μονάδες 2*

ΘΕΜΑ 2°

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής T με μέση τιμή $\bar{t}$, τυπική απόκλιση $s \neq 0$ και η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2}, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } x \neq 4, \\ -24 \cdot s, & \text{αν } x = 4 \end{cases},$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $A = [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι για $x \neq 4$ ο τύπος της συνάρτησης F είναι

$$F(x) = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2). \quad \text{Μονάδες 7}$$

β) Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ της μεταβλητής T . Μονάδες 10

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s}$ στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Ο κυβισμός των κινητήρων X , σε κυβικά εκατοστά (κ.εκ.), ενός δείγματος 4.000 αυτοκινήτων, ακολουθεί κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 100 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. και 3.360 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$, την τυπική απόκλιση s και να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Μονάδες 12

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ. ή μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Μονάδες 7

γ) Αν, μετά από επισκευή, ο κυβισμός κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 6%, να βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά των νέων τιμών του, και να εκτιμήσετε το εύρος τους.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα ενδεχόμενα K, Λ ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(K), P(\Lambda)$ αντίστοιχα, όπου $P(K) \neq 0$.

α) Η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot [x - P(\Lambda)]^2 + x \cdot P(K), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ μέγιστο το $-\frac{5}{2} \cdot [P(K)]^2$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $x_0 = P(K) + P(\Lambda)$

Μονάδες 6

ii) $P(\Lambda) = 2 \cdot P(K)$

Μονάδες 4

β) Έστω, επιπλέον, ότι οι παρατηρήσεις:

$$P(\emptyset), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega), P(K), P(\emptyset), P(K), P(K \cup \Lambda), P(K \cap \Lambda)$$

έχουν διάμεσο $\delta = \frac{1}{4}$ και $P[(K - \Lambda) \cup (\Lambda - K)] = \frac{2}{3}$.

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $K, \Lambda, K \cap \Lambda, K \cup \Lambda$.

Μονάδες 12

ii) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των παραπάνω παρατηρήσεων. *Μονάδες 3*