ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. **α) Λάθος** διότι η f είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

β) Σωστό διότι $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ άρα $f(x)>0$ κοντά στο x_0

γ) Σωστό διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}>0 \text{ διότι } f\uparrow \text{ άρα } f(a)<f(\beta)$$

δ) Λάθος διότι $f''(x)\geq 0, x\in\Delta$. (Παράδειγμα: για την $f(x)=x^4$ είναι:

$$f'(x)=4x^3, f''(x)=12x^2\geq 0 \text{ για κάθε } x\in R\text{)}$$

ε) Σωστό διότι αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx=0$ (άτοπο)

στ) Σωστό διότι αν η f δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Όμως η f δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε $\int_a^\beta f(x)dx>0$ άτοπο.

Θέμα 2ο

Α. $A=(0,+\infty)$ πεδίο ορισμού

$$f'(x)=\frac{(\ln(ax))'\cdot\sqrt{x}-\ln(ax)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{ax}\cdot(ax)'\cdot\sqrt{x}-\ln(ax)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln(ax)}{2x\sqrt{x}}\qquad(1)$$

Είναι $f'(1)=\frac{2-\ln a}{2}=1\Leftrightarrow 2-\ln a=2\Leftrightarrow \ln a=0\Leftrightarrow a=1$

Β. α) Για α=1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0 \text{ και } f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},\ x>0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f\left(e^2\right)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}(\max)$$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Άρα $f\left(\left(0,e^2\right]\right)=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$ και $f\left(\left[e^2,+\infty\right)\right)=\left[\frac{2}{e},0\right)$

Η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) $\ln\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\ln\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\sqrt{\kappa}>\sqrt{\kappa}\cdot\ln\sqrt{\kappa+1}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\kappa>\sqrt{\kappa}\cdot\ln(\kappa+1)\Leftrightarrow$

$\frac{\ln\kappa}{\sqrt{\kappa}}>\frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}}\Leftrightarrow$

$f(\kappa)>f(\kappa+1)$ ισχύει διότι

$\kappa+1>\kappa\geq 8>e^2$ και $f\downarrow$ στο $\left[e^2,+\infty\right)$

Θέμα 3ο

Α. α) $z_1 = \dfrac{1+\beta - i(a-\beta i)}{1+f(\beta)-i\left[f(a)-i\cdot f(\beta)\right]} = \dfrac{1-i\cdot a}{1-i\cdot f(a)} =$

$$= \frac{(1-i\cdot a)(1+i\cdot f(a))}{\left[1-i\cdot f(a)\right]\cdot\left[1+i\cdot f(a)\right]} = \frac{(1+a\cdot f(a))+i(-a+f(a))}{1+f^2(a)}$$

$z_1 \in R$ αν και μόνο αν $-a+f(a)=0 \Leftrightarrow f(a)=a$

β) Ισχύει $z=-iw \Leftrightarrow a+\beta i = -i\left(f(a)+i\cdot f(\beta)\right) \Leftrightarrow a+\beta i = f(\beta)-if(a)$ οπότε $f(a)=-\beta$ και $f(\beta)=a$. Άρα $w=-\beta+\alpha\cdot i$. Έστω $A(a,\beta)$ και $B(-\beta,a)$. Είναι $(OA)=\sqrt{a^2+\beta^2}, (OB)=\sqrt{a^2+\beta^2}$ δηλαδή $O\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελές.

Επειδή $(AB)^2=(a+\beta)^2+(a-\beta)^2=$

$$=a^2+\beta^2+2a\beta+a^2+\beta^2-2a\beta=2\left(a^2+\beta^2\right)=(OA)^2+(OB)^2$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

Β. α) Έχουμε $\left|a+\beta i-i\left(f(a)+if(\beta)\right)\right|^2=|a+\beta i|^2+|if(a)-f(\beta)|^2$

$$\left|a+f(\beta)+i\left(\beta-f(a)\right)\right|^2=a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\left(a+f(\beta)\right)^2+\left(\beta-f(a)\right)^2=a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$a^2+f^2(\beta)+2a\cdot f(\beta)+\beta^2+f^2(a)-2\beta\cdot f(a)=a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$2a\cdot f(\beta)-2\beta\cdot f(a)=0\Leftrightarrow a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)=0$

β) Έστω $A(a,\beta)$ και $B\left(f(a),f(\beta)\right)$

$\lambda_{OA}=\dfrac{\beta}{a}$ και $\lambda_{OB}=\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ οι συντελεστές διεύθυνσης ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα

Λόγω της (1) είναι $\lambda_{OA}=\lambda_{OB}$ που σημαίνει Α, Ο, Β συνευθειακά.

(Είναι $f(a)\neq 0$ διότι αν $f(a)=0$ τότε και $f(\beta)=0$ άτοπο)

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η οποία διέρχεται από το $(0,0)$ όταν $-f(x_0)=-x_0\cdot f'(x_0)\Leftrightarrow x_0\cdot f'(x_0)-f(x_0)=0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση

$$x\cdot f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0.$$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in[a,\beta]$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και
- $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{a}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=g(\beta)$ λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση $g'(x)=0$ δηλαδή η ισοδύναμη της $x\cdot f'(x)-f(x)=0$

Θέμα 4ο

α) $\displaystyle\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)\,dt-4x\cdot f(x)\cdot\int_0^1 tdt$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)\,dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)\,dt-4x\cdot f(x)\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)\,dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)\,dt-\frac{4}{2}x\cdot f(x)\quad (1)$$

Με παραγώγιση των μελών της (1) έχουμε:

$$(x^2+1)f''(x)=-2x\cdot f'(x)-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$(x^2+1)f''(x)+2x\cdot f'(x)=-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=\left[-2x\cdot f'(x)\right]'$, άρα $(x^2+1)f'(x)=-2x\cdot f(x)+C_1$ (2)

Για $x=0$ είναι $f'(0)=C_1$ άρα $C_1=2$

Η (2) γράφεται:

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2$$

$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=(2x)'$ Άρα $(x^2+1)\cdot f(x)=2x+C_2$

Για $x=0$ είναι $f(0)=C_2$ άρα $C_2=0$. Επομένως $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, x\in R$

<u>β΄ μέθοδος</u>

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\left[(t^2+1)f'(t)\right]_0^x-\int_0^x 2tf'(t)\,dt=-2\int_0^x tf'(t)\,dt-4xf(x)\int_0^1 tdt\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-f'(0)=-4x\cdot f(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-2=-2x\cdot f(x)\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2\Leftrightarrow$$

$\left[\left(x^2+1\right)f\left(x\right)\right]' = \left(2x\right)'$

Άρα $\left(x^2+1\right)f\left(x\right) = 2x + c$

Για $x=0$ είναι $f\left(0\right)=c$ δηλαδή $c=0$ οπότε $\left(x^2+1\right)f\left(x\right)=2x \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

β) $\mathrm{E}\left(a\right)=\int_0^a \dfrac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^a\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a=\ln\left(a^2+1\right)$.

Το a είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'\left(a\right)=\left[\ln\left(a^2\left(t\right)+1\right)\right]'=\frac{1}{a^2\left(t\right)+1}\left(a^2\left(t\right)+1\right)'=\frac{2a\left(t\right)\cdot a'\left(t\right)}{a^2\left(t\right)+1}.$$

Είναι $a'\left(t\right)=\dfrac{10}{3}cm/\sec$ και $a\left(t\right)=3cm$, άρα $E'\left(1\right)=\dfrac{2\cdot 3\cdot \frac{10}{3}}{9+1}cm^2/\sec = 2cm^2/\sec$.

Ο ρυθμός μεταβολής του $E\left(a\right)$ όταν $a=3cm$.

γ) i) Αφού $x\to+\infty$ για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$-\left|f\left(x\right)\right|\le g\left(x\right)+x-2\le\left|f\left(x\right)\right|$$

$$-\frac{2x}{x^2+1}\le g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\le\frac{2x}{x^2+1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\right]=0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii) Είναι $E=\int_0^2\left|g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\right|dx=\int_0^2\left|g\left(x\right)+x-2\right|dx$ και

$\left|g\left(x\right)+x-2\right|\le\left|f\left(x\right)\right|$ (ερώτημα i)

$\left|g\left(x\right)+x-2\right|-\left|f\left(x\right)\right|\le 0$. Άρα

$$\int_0^2\left[\left|g\left(x\right)+x-2\right|-\left|f\left(x\right)\right|\right]dx\le 0\Leftrightarrow$$

$$\int_0^2\left|g\left(x\right)+x-2\right|dx-\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx\le 0\Leftrightarrow$$

$$E-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$E-\ln 5\le 0\Leftrightarrow E\le\ln 5$$