

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1^ο

A. α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x) = -\eta\mu x$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β) Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Να δώσετε τον ορισμό: Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο A .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0 .

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0) > 0$.

δ) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$.

στ) Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x) dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}, a > 0$.

A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y = 0$, να βρείτε την τιμή του a .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Για $a = 1$:

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Να αποδείξετε: ότι $(\sqrt{\kappa})^{\sqrt{\kappa+1}} > (\sqrt{\kappa+1})^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa \geq 8$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 3ο

Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i$ και $w = f(\alpha) + i \cdot f(\beta)$ με $f(\beta) \neq 0$.

A. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $z_1 = \frac{1 + \beta - i \cdot \bar{z}}{1 + f(\beta) - i \cdot w}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(\alpha) = a$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Αν $z = -iw$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Έστω ότι ισχύει $|z - iw|^2 = |z|^2 + |iw|^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(\alpha) = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Οι εικόνες των z, w και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)$ συνεχή στο $\mathbf{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x (t^2 + 1) \cdot f''(t) dt = 2 \int_x^0 t \cdot f'(t) dt - 4 \int_0^1 x \cdot t \cdot f(x) dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}, \text{ με}$$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbf{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = a > 0$.

Αν το a μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{10}{3} \text{ cm/sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $a = 3 \text{ cm}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g όταν $x \rightarrow +\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$, να αποδείξετε ότι: $E \leq \ln 5$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ