ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^{ο}

Α. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151

Β. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 85

Γ. 1. $n_i = f_i\% \Rightarrow n_i = \frac{n_i}{n}100 \Rightarrow 1 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = 100$

2. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδα 96) ότι $CV = \frac{s}{\bar{x}}$. Όμως $\bar{x} = \frac{(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3}{7} = \frac{0}{7} = 0$.
   Επομένως ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ορίζεται.
3. Από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελίδα 99, προκύπτει: $\bar{x}' = a \cdot \bar{x} + b$, $s' = |a| \cdot s$.
4. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 70: $a_i = n_i \frac{360^0}{n} = 360 f_i$

Δ. Η ζητούμενη μέση επίδοση είναι ο ακόλουθος σταθμικός μέσος:

$$\frac{16 \cdot 8 + 15 \cdot 1,3 + 17 \cdot 0,7}{8 + 1,3 + 0,7} = \frac{128 + 19,5 + 11,9}{10} = \frac{159,4}{10} = 15,94$$

Ε. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδες 27, 28) ότι, αν u η ταχύτητα και α η επιτάχυνση του κινητού, τότε $u(t) = x'(t)$ και $a(t) = u'(t) = x''(t)$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, θα είναι: $u(t) = x'(t) = -t^2 - t - 1$ και $a(t) = x''(t) = u'(t) = -2t - 1$ και επειδή $t \geq 0$, θα είναι $a(t) < 0$. Επομένως, η ταχύτητα του φορτηγού μειώνεται.

ΖΗΤΗΜΑ 2^{ο}

1. Έστω x, y οι δύο ζητούμενες (εκατοστιαίες) σχετικές συχνότητες των κλάσεων [4,6) και [16,18) αντίστοιχα. Ξέρουμε ότι $\sum f_i\% = 100$ και παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δοσμένων σχετικών συχνοτήτων είναι 85. Άρα θα ισχύει $x + y = 100 - 85 = 15$. Εξάλλου, από υπόθεση, έχουμε ότι $y = 4x$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 3$, $y = 12$. Άρα οι ζητούμενες σχετικές συχνότητες είναι 3% και 12% αντίστοιχα.
2. Αθροίζοντας τις δοσμένες σχετικές συχνότητες του πίνακα, βλέπουμε ότι βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 10 έχει πάρει το (16+14+13+12+5)%=60% των υποψηφίων. Από υπόθεση, αυτό το ποσοστό αντιστοιχεί σε πλήθος 55872 ατόμων. Άρα, το ζητούμενο συνολικό πλήθος των υποψηφίων θα είναι: $55872\frac{100}{60} = 93120$ υποψήφιοι.

3. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι, βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13, έχει πάρει το $(\frac{16}{2}+\frac{14}{2})\%=15\%$ των υποψηφίων. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι το 15% του συνόλου, δηλαδή $\frac{15}{100}93120=13968$ υποψήφιοι.
4. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: «ο υποψήφιος είναι της θεωρητικής κατεύθυνσης», Β: «ο υποψήφιος είναι της θετικής κατεύθυνσης» και « Τ: «ο υποψήφιος είναι της τεχνολογικής κατεύθυνσης». Αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», δηλαδή την $P(A\cup T)$. Από υπόθεση είναι P(A)=0,34 και P(T)=2P(B). Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι P(A)+P(B)+P(T)=1. Άρα έχουμε:

   $0,34+P(B)+2P(B)=1 \Leftrightarrow 3P(B)=0,66 \Leftrightarrow P(B)=\frac{0,66}{3} \Leftrightarrow P(B)=0,22$ Επομένως είναι $P(T)=2P(B)=0,44$. Τα ενδεχόμενα Α και Τ είναι ασυμβίβαστα, αφού κάθε μαθητής μπορεί να έχει επιλέξει μόνο μία κατεύθυνση σπουδών. Με εφαρμογή του απλού προσθετικού νόμου, έχουμε: $P(A\cup T)=P(A)+P(T)=0,34+0,44=0,78$. Το πλήθος των υποψηφίων της θετικής κατεύθυνσης είναι $0,22\cdot 93120=20486,4\approx 20486$ υποψήφιοι.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Κ: «το νόμισμα έφερε κεφάλι» και Γ: «το νόμισμα έφερε γράμματα». Με δεντροδιάγραμμα, βρίσκουμε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης: Ω={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}. Το ενδεχόμενο Α: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι» είναι το Α={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ}. Άρα, για την πιθανότητα να συμβεί το Α, έχουμε:. $\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{4}$
2. Κατ` αρχάς, αντικαθιστούμε στον πίνακα (στις τιμές της μεταβλητής y_i) τις τιμές των P(A)=3/4, P(A')=1-3/4=1/4 και P(Ω)=1 οπότε ο πίνακας συχνοτήτων γίνεται:

Τιμές μεταβλητής y_i	Απόλυτες συχνότητες n_i
$\frac{3}{2}x^2$	3
$\frac{3}{4}x^2$	2
x	3

α. Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{y}=\frac{\frac{3}{2}x^2\cdot 3+\frac{3}{4}x^2\cdot 2+3x}{8}=\frac{\frac{24}{4}x^2+3x}{8}=\frac{6x^2+3x}{8}$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{\bar{y}}=\frac{1}{\frac{6x^2+3x}{8}}=\frac{8}{6x^2+3x}\ ,\ x\in R-\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως ρητή συνάρτηση) και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = -8 \cdot \frac{12x+3}{(6x^2+3x)^2}$$

Τώρα έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ και

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -8 \cdot (12x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 12x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x		-1/2		-1/4		0	
$f'(x)$	+	‖	+	0	-	‖	-
$f(x)$	↗	‖	↗	Τ.Μ	↘	‖	↘

Επομένως, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, για $x = -\frac{1}{4}$, το

$$f(-\frac{1}{4}) = \frac{8}{6 \cdot (-\frac{1}{4})^2 + 3 \cdot (-\frac{1}{4})} = \frac{8}{\frac{6}{16} - \frac{3}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{8} - \frac{3}{4}} = \frac{8}{-\frac{3}{8}} = -\frac{64}{3}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

1. $f'(x) = [(P(A))^2 x^3 - (7P(A)-3)x - x\ln x + P(B)]' =$
   $= 3 \cdot [P(A)]^2 x^2 - 7P(A) + 3 - \ln x - 1$
2. Από υπόθεση έχουμε $f'(1) = 0$, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση: $3 \cdot [P(A)]^2 - 7 \cdot P(A) + 2 = 0$. Έχουμε Δ=25 και, τελικά,
   $$P(A) = \begin{cases} \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ , απορ. αφου } 0 \leq P(A) \leq 1 \\ \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ , δεκτη τιμη} \end{cases}$$
   . Άρα, τελικά, $P(A) = \frac{1}{3}$.
3. Για $P(A) = \frac{1}{3}$, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται
   $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - (\frac{7}{3} - 3)x - x\ln x + P(B) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - x\ln x + P(B)$, οπότε
   $f(1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B)$ (αφού ln1=0). Όμως, από υπόθεση, $f(1) = \frac{55}{36}$, άρα έχουμε:
   $\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow \frac{4}{36} + \frac{24}{36} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. Έστω ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1$, άτοπο, αφού $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$. Άρα τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

4. $$\frac{1}{12} \le P(A \cap B) \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) \le P(A) \text{ , ισχυει αφου } \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \\ \text{ΚΑΙ} \\ P(A \cap B) \ge \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{13}{12} - P(A \cup B) \ge \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A \cup B) \le 1 \text{ , που ισχυει} \end{cases}$$