

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

Α. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, δείξτε ότι ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(7 μονάδες)

Β. Έστω ότι έχουμε την κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος μεγέθους n . Αν $X_1, \dots, X_k$ οι τιμές της (ποσοτικής) μεταβλητής, με συχνότητες $n_1, n_2, \dots, n_k$ και σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_k$ αντίστοιχα και $\bar{X}$ ο αριθμητικός μέσος των τιμών του δείγματος, δείξτε ότι $\bar{X} = \sum_{i=1}^k X_i f_i$

(4 μονάδες)

Γ. Απαντήστε (χωρίς απόδειξη - αιτιολόγηση) στις επόμενες ερωτήσεις.

1. Σε ένα δείγμα μεγέθους n , παρατηρήθηκε ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής x_i , η απόλυτη συχνότητα n_i ισούται με την (αντίστοιχη) εκατοστιαία σχετική συχνότητα $f_i\%$, δηλαδή ισχύει $n_i = f_i\%$ για κάθε $i=1,2,3,\dots$. Ποιο είναι το μέγεθος n του δείγματος;

(2 μονάδες)

2. Τις τελευταίες 7 ημέρες, οι θερμοκρασίες σε ένα χωριό της Νορβηγίας ήταν $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ βαθμούς αντίστοιχα. Τι έχετε να παρατηρήσετε για το συντελεστή μεταβλητότητας της θερμοκρασίας αυτού του επταημέρου;

(2 μονάδες)

3. Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι τιμές ενός δείγματος, $\bar{x}$ η μέση τιμή τους και s η τυπική τους απόκλιση. Αν κάθε μία από τις πιο πάνω τιμές πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό a και σε κάθε γινόμενο προστεθεί ο αριθμός b , γράψτε τη μέση τιμή $\bar{x}'$ και την τυπική απόκλιση s' των νέων τιμών $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

(2 μονάδες)

4. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και συμβολίζουμε με n_i τις συχνότητες και f_i τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του δείγματος, γράψτε με τι ισούται το a_i .

(2 μονάδες)

Δ. Ένας μαθητής της Γ' Λυκείου, διεκδικεί την εισαγωγή του στην

τριτοβάθμια εκπαίδευση με τους εξής βαθμούς:

1. Γενικός βαθμός πρόσβασης: 16
2. 1^ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 15
3. 2^ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 17

Υπολογίστε τη μέση επίδοση του συγκεκριμένου μαθητή.

(Υπενθυμίζεται ότι ο γενικός βαθμός πρόσβασης έχει συντελεστή βαρύτητας 8, το 1^ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας έχει συντελεστή βαρύτητας 1,3 και το 2^ο 0,7).

(2 μονάδες)

Ε. Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα πάνω στην Εθνική οδό, μεταφέροντας εμπορεύματα από τη Θεσσαλονίκη προς την Αθήνα. Καθώς πλησιάζει προς τη Λάρισα, η θέση του πάνω στην Εθνική οδό συναρτήση του χρόνου t , δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t.$$

Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του

φορτηγού. Η ταχύτητά του αυξάνεται ή ελαττώνεται; (4 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των βαθμών πρόσβασης του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου, που εξετάστηκαν σε εθνικό επίπεδο το έτος 2002, σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία που έδωσε στη δημοσιότητα το Υπουργείο Παιδείας.

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$
0 – 2	1
2 – 4	2
4 – 6	
6 - 8	16
8 – 10	18
10 – 12	16
12 – 14	14
14 - 16	13
16 – 18	
18 - 20	5

1. Αν είναι γνωστό ότι το πλήθος των μαθητών που πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και μικρότερο του 18, ήταν τετραπλάσιο αυτών που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4 και μικρότερο του 6, να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις δύο σχετικές συχνότητες που λείπουν. **(5 μονάδες)**
2. Είναι γνωστό, ότι 55872 μαθητές, πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 10. Να βρείτε το συνολικό πλήθος των υποψηφίων. **(4 μονάδες)**
3. Να υπολογίσετε πόσοι υποψήφιοι είχαν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13. **(4 μονάδες)**
4. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα αυτός να είναι υποψήφιος της θεωρητικής κατεύθυνσης είναι 0,34 ενώ η πιθανότητα να είναι υποψήφιος της θετικής, είναι μισή από την πιθανότητα να είναι υποψήφιος της τεχνολογικής. Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», καθώς και το πλήθος των μαθητών της θετικής κατεύθυνσης (στρογγυλοποιείστε την απάντησή σας στον πλησιέστερο ακέραιο). **(12 μονάδες)**

ΖΗΤΗΜΑ 3^ο

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές και θεωρούμε το ενδεχόμενο A: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι».

1. Βρείτε την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A. **(8 μονάδες)**
2. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας συχνοτήτων:

Τιμές μεταβλητής y_i	Απόλυτες συχνότητες n_i
$2x^2 P(A)$	3
$3x^2 P(A')$	2
$xP(\Omega)$	3

Όπου Ω και $P(A)$ ο δειγματικός χώρος και η πιθανότητα

αντίστοιχα του 1^{ου} ερωτήματος και $x \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$.

α. Υπολογίστε (ως συνάρτηση του x) τη μέση τιμή $\bar{y}$ της μεταβλητής y

(4 μονάδες)

β. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{y}$

(13 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (P(A))^2 x^3 - [7P(A) - 3]x - x \ln x + P(B)$, με $x > 0$ και $P(A), P(B)$, οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω .

1. Βρείτε την $f'(x)$ **(4 μονάδες)**

2. Βρείτε την $P(A)$, αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f έχει, για $x=1$, εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$. **(6 μονάδες)**

3. Αν $P(A) = \frac{1}{3}$ και $f(1) = \frac{55}{36}$, δείξτε ότι $P(B) = \frac{3}{4}$ και ότι τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα. **(7 μονάδες)**

4. Δείξτε ότι $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ **(8 μονάδες)**