ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη εξίσωσης κύκλου, σχολικό βιβλίο, σελίδες 81-82.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 23.

Α3. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ο συντελεστής του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$\lambda_{\overrightarrow{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-(\lambda+1)}{\lambda-(-1)}=\frac{3-\lambda}{\lambda+1}$$

οπότε

$$\frac{3-\lambda}{\lambda+1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 9-3\lambda=\lambda+1\Leftrightarrow 8=4\lambda\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda=2}$$

Β2. **i)** Η (ε_1) αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=\lambda\cdot x$ και αφού διέρχεται και από το $B(2,4)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{4-0}{2-0}=2$ οπότε

$$(\varepsilon_1): \boxed{y=2x}$$

ii) Έχουμε $(\delta): x+y+2=0\Leftrightarrow y=-x-2$ άρα $\lambda_\delta=-1$ και αφού

$(\varepsilon_1)//(\delta)$ θα είναι $\lambda_{\varepsilon_2} = -1$.

Επειδή η (ε_2) διέρχεται από το $(0,3)$ θα έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_2): y = -1 \cdot x + 3 \Leftrightarrow (\varepsilon_2): \boxed{y = -x + 3}$$

Β3. i) Για το σημείο τομής Γ:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{άρα } \Gamma(1,2).$$

ii) Οι $(\varepsilon_2), (\delta)$ είναι παράλληλες και το $\Gamma(1,2)$ είναι σημείο της (ε_2) άρα η απόσταση των $(\varepsilon_2), (\delta)$ είναι ίση με την απόσταση του Γ από την (δ) δηλαδή

$$d(\varepsilon_2, \delta) = \delta(\Gamma, \delta) = \frac{|1 + 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

iii) Έχουμε $A(-1,3), B(2,4), \Gamma(1,2)$ άρα

$$\overrightarrow{AB} = (2 + 1, 4 - 3) = (3,1)$$
$$\overrightarrow{A\Gamma} = (1 + 1, 2 - 3) = (2, -1)$$

Αν $\hat{\varphi} = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}}\right)$ ισχύει $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Gamma}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ όπου

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

οπότε

$$5 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\boxed{\varphi = 45^\circ}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Για την εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 28 = 0$ (1) έχουμε

$A = 4, B = 0, \Gamma = -28$ οπότε

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 0 + 112 = 128 > 0$ άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (-2,0)$$

και ακτίνα

$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{128}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

ii) Αφού $x > 0$ θα είναι και $p > 0$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση της εστίας απέχει από το $O(0{,}0)$ είναι $\left|\frac{p}{2}\right| = \frac{p}{2}$ όπως και η απόσταση της διευθετούσας (δ) από το $O(0{,}0)$ είναι $\left|-\frac{p}{2}\right| = \frac{p}{2}$. Άρα

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 4.$$

Οπότε $C_1: y^2 = 8x$.

Γ2. Για τα σημεία τομής παραβολής και κύκλου λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 8x & (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 28 = 0 & (2) \end{cases}$$

Η $(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 + 8x + 4x - 28 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12x - 28 = 0$

$$\Delta = 144 + 112 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 16}{2} \begin{cases} 2 \\ -14 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Άρα $x = 2$ οπότε $(1) \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$. Άρα τέμνονται στα σημεία $M_1(2{,}4)$ και $M_2(2,-4)$.

Γ3. Εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ σε σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$ οπότε για την $y^2 = 8x$ είναι στο σημείο

$M_1(2{,}4): y \cdot 4 = 4(x+2) \Leftrightarrow \varepsilon_1: \boxed{y = x + 2}$

Στο σημείο $M_2(2,-4): y \cdot (-4) = 4(x+2) \Leftrightarrow \varepsilon_2: \boxed{y = -x - 2}$

Επειδή $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$ οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται κάθετα και για το σημείο τομής τους ισχύει:

$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ άρα τέμνονται στο σημείο $K(-2{,}0)$ που είναι το κέντρο του κύκλου.

Γ4. Είναι $\varepsilon_2: y = -x - 2 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.

Η διευθετούσα της παραβολής είναι $\delta: x = -\frac{p}{2} = -2$

Έστω $\Delta = (-2, y_\Delta)$ σημείο της διευθετούσας.

Θέλουμε

$$d(\Delta, \varepsilon_2) = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-2 + y_\Delta + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|y_\Delta|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|y_\Delta| = 8 \Leftrightarrow y_\Delta = 8 \quad \text{ή} \quad y_\Delta = -8.$$

Άρα $\Delta_1(-2{,}8)$ και $\Delta_2(-2,-8)$ ζητούμενα σημεία.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $E'(x,0)$ και $E(-x,0)$ με $x<0$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $E'KE$ είναι

$(E'KE)=\frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{E'K},\overrightarrow{EK}\right)\right|$ όπου $K(0,\lambda)$ και

$\overrightarrow{E'K}=(0-x,\lambda-0)=(-x,\lambda)$, $\overrightarrow{EK}=(0+x,\lambda-0)=(x,\lambda)$ οπότε

$(E'KE)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-x & \lambda\\ x & \lambda\end{vmatrix}\right| \Leftrightarrow 4|\lambda|=\frac{1}{2}|-x\lambda-x\lambda| \Leftrightarrow 8|\lambda|=2|-x\lambda| \Leftrightarrow$

$8|\lambda|=2|x|\cdot|\lambda| \Leftrightarrow |x|=4$

και αφού $x<0 \Longrightarrow x=-4$. Άρα $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$.

Δ2. i) Ο κύκλος με διάμετρο $E'E$ έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 4 άρα η εξίσωση του είναι $C: x^2+y^2=16$.

ii) Αν $M(x_1,y_1)$ σημείο του κύκλου C, η εφαπτομένη σε αυτό έχει εξίσωση

$$xx_1+yy_1=16\ (1)$$

(Αν $y_1=0$ η εφαπτομένη θα είναι της μορφής $x=\kappa$ άρα όχι παράλληλη της $y=-x$).

Έτσι για $y_1\neq 0$ η (1): $yy_1=-x_1\cdot x+16 \Leftrightarrow y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{16}{y_1}$

και αφού είναι παράλληλη στην $y=-x$ θα έχουμε

$$-\frac{x_1}{y_1}=-1 \Leftrightarrow x_1=y_1.$$

Όμως για το σημείο $M(x_1,y_1)$ του κύκλου ισχύει :

$$x_1{}^2+y_1{}^2=16 \Leftrightarrow x_1{}^2+x_1{}^2=16 \Leftrightarrow 2x_1{}^2=16 \Leftrightarrow$$

$$x_1{}^2=8 \Leftrightarrow x_1=\pm 2\sqrt{2}.$$

Άρα $M_1\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ και $M_2\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$.

Οι εξισώσεις εφαπτομένων θα είναι:

στο M_1: $x\cdot 2\sqrt{2}+y\cdot 2\sqrt{2}=16 \Leftrightarrow x+y=\frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{x+y=4\sqrt{2}} \text{ και}$$

στο M_2: $x\left(-2\sqrt{2}\right)+y\left(-2\sqrt{2}\right)=16 \Leftrightarrow$

$$x+y=-\frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{x+y=-4\sqrt{2}}$$

Δ3. i) $K(0,\lambda), \lambda \neq 0$

Έστω ρ η ακτίνα των κύκλων τότε :

$(x-0)^2+(y-\lambda)^2=\rho^2 \Leftrightarrow x^2+(y-\lambda)^2=\rho^2$ όπου

$\rho=(KE)=(KE')$. Με $E(4,0)$ είναι

$$\rho=\sqrt{(0-4)^2+(0-\lambda)^2}=\sqrt{16+\lambda^2}$$

Άρα οι κύκλοι με κέντρο Κ που διέρχονται από τα E, E' έχουν εξίσωση

$$\boxed{x^2+(y-\lambda)^2=16+\lambda^2}$$

ii) Το κέντρο $K(0,\lambda)$ των κύκλων βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x=0$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $(n): y=-8$. Άρα η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\rho=d(K,n)=\frac{|\lambda+8|}{1}=|\lambda+8|.$$

Αλλά $\rho=\sqrt{16+\lambda^2}$ οπότε

$$\sqrt{16+\lambda^2}=|\lambda+8| \Leftrightarrow 16+\lambda^2=(\lambda+8)^2 \Leftrightarrow$$

$$16+\lambda^2=\lambda^2+16\lambda+64 \Leftrightarrow 16\lambda=-48 \Leftrightarrow \lambda=-3.$$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι ο $C_1: x^2+(y+3)^2=25$.