

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 18 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 175
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 35
A3. 1 ΣΤ, 2 Ζ, 3 Δ, 4 Β, 5 Α
A4. 1 Σ, 2 Σ, 3 Σ, 4 Λ, 5 Λ

ΘΕΜΑ Β

- B1. α.** Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 2^x$ είναι το $A = \mathbb{R}$, ενώ το σύνολο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$
β. Η συνάρτηση $f(x) = 2^x$, είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , αφού $2 > 1$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x .

- B2.** Για τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β έχουμε διαδοχικά:

$$\log \frac{f(\alpha+1)}{f(4)} = 0 \Leftrightarrow \log \frac{2^{\alpha+1}}{2^4} = 0 \Leftrightarrow \log 2^{\alpha+1-4} = 0 \Leftrightarrow \log 2^{\alpha-3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^{\alpha-3} = 10^0 \Leftrightarrow 2^{\alpha-3} = 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-3} = 2^0 \Leftrightarrow \alpha-3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

και

$$\beta = e^{1-2\ln\sqrt{e}} \Leftrightarrow \beta = \frac{e^1}{e^{2\ln\sqrt{e}}} \Leftrightarrow \beta = \frac{e}{e^{\ln\sqrt{e}^2}} \Leftrightarrow \beta = \frac{e}{(\sqrt{e})^2} \Leftrightarrow \beta = \frac{e}{e} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$$

B3. α.
$$\begin{cases} \alpha \cdot f(x) + 2\beta \cdot e^y = f(3) \\ f(x) - \beta \cdot e^y = f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 1 \cdot e^y = 2^3 \\ 2^x - 1 \cdot e^y = 2^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot e^y = 8 \\ 2^x - e^y = 1 \end{cases}$$

β.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot e^y = 8 \cdot 1 \\ 2^x - e^y = 1 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot e^y = 8 \\ 2 \cdot 2^x - 2 \cdot e^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot 2^x + 0 \cdot e^y = 10 \\ 2^x - e^y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x - e^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^1 \\ 2^x - e^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ e^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ e^y = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (1, 0)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(1 + \eta\mu\theta)$ συνθ, προκύπτει

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + (1 + \eta\mu\theta)^2 = 2(1 + \eta\mu\theta) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 + 2\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta = 2 + 2\eta\mu\theta \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta + 1 + 2\eta\mu\theta = 2 + 2\eta\mu\theta \Leftrightarrow 2 + 2\eta\mu\theta = 2 + 2\eta\mu\theta \text{ Αληθής,}$$

οπότε λόγω των ισοδυναμιών αληθεύει και η αρχική.

Γ2. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi(\pi - x) = -\epsilon\varphi x$, $\sigma\upsilon\nu(3\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$

$$\sigma\varphi\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\varphi x$$

Επομένως είναι: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\epsilon\varphi x)}{-\sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\varphi x} = 1$

Γ3. Από την ταυτότητα που αποδείξαμε στο Γ1 και για τα x για τα οποία ορίζεται το πρώτο μέλος έχουμε ότι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}, \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

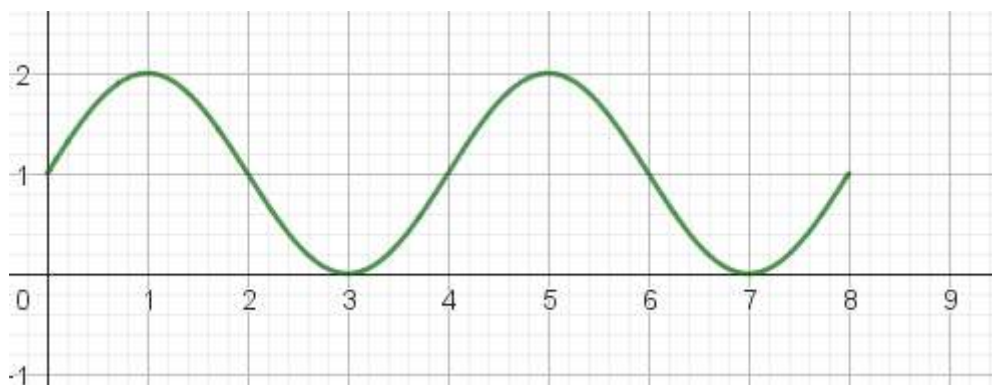
Για όλες αυτές τις τιμές ορίζεται το πρώτο μέλος, επομένως είναι όλες δεκτές ως ρίζες της εξίσωσης.

Γ4. α. Έχουμε $f(3) = 0 \Rightarrow \lambda + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, οπότε

$$f(x) = 1 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in [0, 8]$$

β. $\Gamma = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

γ.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα.

Από αυτήν προκύπτουν άμεσα οι απαντήσεις στα επόμενα ερωτήματα.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή το 0 στις θέσεις $x=3$, $x=7$, μέγιστη τιμή το 2 στις θέσεις $x=1$, $x=5$. Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $[3,5]$, $[7,8]$, (όχι στην ένωσή τους) και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[1,3]$ και $[5,7]$, (όχι στην ένωσή τους).

Οι απαντήσεις αυτές θα μπορούσαν να προκύψουν και αλγεβρικά.

ΘΕΜΑ Δ

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P με το $x+1$ είναι ίσο με -10

έχουμε: $P(-1) = -10 \Rightarrow (-1)^3 + \alpha(-1)^2 + 4(-1) + \beta = -10 \Rightarrow \alpha + \beta = -5$ (1)

Δ1. Έχουμε $P(1) = 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + \beta = \alpha + \beta + 5 \stackrel{(1)}{=} -5 + 5 = 0$, επομένως ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P .

Δ2. Από το δεδομένο προκύπτει ότι

$P(x) = (x-1)^3 + (x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + 4x + \beta = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Απαιτώντας την ισότητα των συντελεστών των ομοιόβαθμων όρων προκύπτει $\alpha = -3$ και $\beta = -2$.

Δ3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner στη θέση της γνωστής ρίζας 1 έχουμε:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & 4 & -2 & 1 \\ & 1 & -2 & 2 & \\ \hline 1 & -2 & 2 & 0 & \end{array}$$

Άρα: $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, αφού ο δεύτερος παράγοντας του P είναι τριώνυμο με $\Delta = -4 < 0$, οπότε από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου λαμβάνει, για κάθε πραγματικό αριθμό x , τιμές ομόσημες του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου του, δηλαδή θετικές.

Δ4. α. Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει να έχει νόημα ο λογάριθμος άρα πρέπει $P(x) > 0$, οπότε πρέπει $x > 1$, όπως προκύπτει, ως πόρισμα, από το ερώτημα Δ3.

Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι το $A = (1, +\infty)$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ και αφού η πολυωνυμική συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} έχουμε:

$$P(-1) \leq P(\eta\mu x) \leq P(1) \Leftrightarrow -10 \leq P(\eta\mu x) \leq 0 \quad \text{ή} \quad -10 \leq h(x) \leq 0.$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ελάχιστη τιμή, την τιμή -10 και μέγιστη τιμή, την τιμή 0 .

Την ελάχιστη τιμή -10 τη λαμβάνει όταν $\eta\mu x = -1$ δηλαδή για $x = x_1 = 2κπ - \frac{\pi}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

Τη μέγιστη τιμή 0 τη λαμβάνει όταν $\eta\mu x = 1$ δηλαδή για $x = x_2 = 2κπ + \frac{\pi}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

Οι θέσεις x_1, x_2 είναι οι μόνες θέσεις ελαχίστου, μεγίστου αντίστοιχα, αφού για κάθε άλλο x διαφορετικό των x_1, x_2 είναι $-1 < \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow P(-1) < P(\eta\mu x) < P(1) \Leftrightarrow -10 < h(x) < 0$.