



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 10 Ιανουαρίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ορισμός εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, σχολικό βιβλίο σελίδα 41.

A2. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελίδα 41.

A3. α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 3 + 48 = 51$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

ii) $\overrightarrow{AB} = 5 \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} = 5 \cdot (3, 4) - (1, 12) = (15, 20) - (1, 12) = (14, 8)$

και

$$\overrightarrow{AG} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 55, |\vec{\beta}| + 2) = (51 - 55, 5 + 2) = (-4, 7)$$

B2. Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ δεν είναι παράλληλα. Έχουμε:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 14 \cdot 7 - (-4) \cdot 8 = 98 + 32 = 130 \neq 0$$

άρα $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AG}$ οπότε τα A, B, G δεν είναι συνευθειακά, άρα ABG τρίγωνο.

B3. Έστω $A(x_A, y_A)$. Αφού $\overline{AG} = (-4, 7)$ και $G(-10, 6)$ έχουμε:

$$\overline{AG} = (-10 - x_A, 6 - y_A) \Leftrightarrow (-4, 7) = (-10 - x_A, 6 - y_A)$$

$$\Leftrightarrow -10 - x_A = -4 \text{ και } 6 - y_A = 7 \Leftrightarrow x_A = -6 \text{ και } y_A = -1$$

Άρα $A(-6, -1)$.

Έστω $B(x_B, y_B)$ αφού $\overline{AB} = (14, 8)$ και $A(-6, -1)$

$$\text{Έχουμε } \overline{AB} = (x_B - (-6), y_B - (-1)) \Leftrightarrow (14, 8) = (x_B + 6, y_B + 1)$$

$$\Leftrightarrow x_B + 6 = 14 \text{ και } y_B + 1 = 8 \Leftrightarrow x_B = 8 \text{ και } y_B = 7.$$

Άρα $B(8, 7)$.

B4. Για το μέσο M του AB ισχύει

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6 + 8}{2} = 1 \text{ και}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3.$$

Άρα $M(1, 3)$.

$$\text{Έτσι } \overline{MG} = (x_G - x_M, y_G - y_M) = (-10 - 1, 6 - 3) = (-11, 3).$$

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε:

$$\vec{u} = \kappa \cdot \overline{MG} + \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow (-19, 42) = \kappa(-11, 3) + \lambda(1, 12) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -19 = -11\kappa + \lambda & | & 3 \\ 42 = 3\kappa + 12\lambda & | & 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -57 = -33\kappa + 3\lambda \\ 462 = 33\kappa + 132\lambda \end{cases} \Leftrightarrow 405 = 135\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση } 42 = 3\kappa + 12\lambda \text{ παίρνουμε}$$

$$42 - 36 = 3\kappa \Leftrightarrow 3\kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa = 2. \text{ Άρα το } \vec{u} \text{ γράφεται ως γραμμικός}$$

$$\text{συνδυασμός των } \overline{MG} \text{ και } \vec{a} \text{ ως: } \vec{u} = 2 \cdot \overline{MG} + 3 \cdot \vec{a}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Για την ευθεία (ε_1) : $\lambda_1 = \varepsilon\phi 45^\circ = 1$ και αφού τέμνει τον $y'y$ στο -2 θα είναι:
 (ε_1) : $\boxed{y = x - 2}$

ii. Θέτουμε $y = 0$ οπότε βρίσκουμε $0 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2$ άρα $A(2, 0)$.

Γ2. Για την ευθεία (ε_2) : $\lambda_2 = \frac{y_K - y_B}{x_K - x_B} = \frac{6 - 0}{0 - 6} = \frac{6}{-6} = -1$ και παίρνοντας ότι διέρχεται από το σημείο $K(0, 6)$ βρίσκουμε $y - 6 = -1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow$

$$\boxed{y = -x + 6} (\varepsilon_2)$$

Αφού $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ οι ευθείες τέμνονται κάθετα.

Για το σημείο τομής τους Γ , λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -x + 6 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Άρα πράγματι $\Gamma(4, 2)$.

Γ3. i) Για το μέσο M της AB έχουμε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

δηλαδή $M(4, 0)$.

Για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(4, 2)$ και $M(4, 0)$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και έχει εξίσωση ΓM :
 $x = 4$.

Έστω $\Delta(4, y_\Delta)$ σημείο της διαμέσου ΓM . Για να είναι παραλληλόγραμμο το $A\Gamma B\Delta$ πρέπει και αρκεί

$$\overline{A\Gamma} = \overline{\Delta B} \Leftrightarrow (4 - 2, 2 - 0) = (6 - 4, 0 - y_\Delta) \Leftrightarrow (2, 2) = (2, -y_\Delta) \Leftrightarrow -y_\Delta = 2 \Leftrightarrow y_\Delta = -2. \text{ Άρα } \Delta(4, -2).$$

ii) Αφού οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται κάθετα στο σημείο Γ έχουμε $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$. Θα δείξουμε επιπλέον ότι 2 διαδοχικές του πλευρές είναι ίσες.

Αφού $A(2, 0)$, $\Gamma(4, 2)$ και $B(6, 0)$ έχουμε:

$$(A\Gamma) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \text{ και}$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \text{ άρα } (A\Gamma) = (B\Gamma)$$

Οπότε τελικά το $A\Gamma B\Delta$ είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}^2}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}| \cdot 2|\vec{\alpha}|} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ακόμη: } |\vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\beta} - \vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = (\vec{\beta} - \vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\gamma}^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2 \cdot \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\gamma}^2 = (2|\vec{\alpha}|)^2 - |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = 3|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = 3\vec{\alpha}^2.$$

Δ2. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = 0$

$$\text{Έχουμε } \overline{AB} \cdot \overline{AG} = (-3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) =$$

$$= -3\vec{\alpha}^2 - 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}^2 =$$

$$= -3|\vec{\alpha}|^2 - 5 \cdot \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = -3 \cdot \vec{\alpha}^2 - 5 \cdot \vec{\alpha}^2 + 2 \cdot (2|\vec{\alpha}|)^2 =$$

$$= -8 \cdot \vec{\alpha}^2 + 8 \cdot \vec{\alpha}^2 = 0 \text{ άρα } \overline{AB} \perp \overline{AG}.$$

ii) Είναι $\overline{BG} = \overline{BA} + \overline{AG} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$$\text{Οπότε } |\overline{BG}| = \sqrt{112} \Leftrightarrow |4\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{112} \Leftrightarrow |4\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 112$$

$$\Leftrightarrow (4\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 112 \Leftrightarrow 16 \cdot \vec{\alpha}^2 + 8 \cdot \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$16 \cdot |\vec{\alpha}|^2 + 8 \cdot |\vec{\alpha}|^2 + (2|\vec{\alpha}|)^2 = 112 \Leftrightarrow 28|\vec{\alpha}|^2 = 112 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 2 \text{ αφού } |\vec{\alpha}| \geq 0.$$

Δ4. i) Είναι $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ από την (1) άρα $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

ii) Αφού η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή είναι $\Delta = 0$.

$$\text{Όμως } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}|^2 - 4 \cdot 1 \cdot \vec{\alpha}^2 =$$

$$= (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})^2 - 4\vec{\alpha}^2 = \vec{\gamma}^2 - 2 \cdot \vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}^2 =$$

$$= 3\vec{\alpha}^2 - 2 \cdot \vec{\alpha}\vec{\gamma} - 3\vec{\alpha}^2 = -2 \cdot \vec{\alpha}\vec{\gamma}$$

και αφού $\Delta = 0$ έπεται $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$ άρα $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$.

Αφού $\vec{\alpha} \perp \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ τελικά $\vec{\gamma} // \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.