

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2Θ(α)**

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Απόδειξη εξίσωσης κύκλου, σχολικό βιβλίο σελίδα 83
- A2.** α) Ορισμός εσωτερικού γινομένου, σχολικό βιβλίο σελίδα 41
β) Ορισμός εκκεντρότητας έλλειψης, σχολικό βιβλίο σελίδα 104
- A3.** α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε $2 \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (3, -11) \Leftrightarrow 2 \cdot (\lambda, -3) - (1, \lambda^2 + 1) = (3, -11)$
 $\Leftrightarrow (2\lambda - 1, -7 - \lambda^2) = (3, -11) \Leftrightarrow$

$$2\lambda - 1 = 3 \text{ και } -7 - \lambda^2 = -11 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ και } \lambda = \pm 2. \text{ Άρα } \lambda = 2.$$

B2. Για $\lambda = 2$ τα διανύσματα γίνονται $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 5)$.

Γνωρίζουμε ότι $\sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \quad (1),$

όπου $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 = -13$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$
 $|\vec{\beta}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26},$ άρα η (1) γίνεται

$$\sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{-13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

B3. Αφού $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ θα είναι $A(2, -3)$ και $B(1, 5)$.

α) Για το μέσο Δ του AB θα είναι $x_{\Delta} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, $y_{\Delta} = \frac{-3+5}{2} = 1$,

δηλαδή $\Delta(\frac{3}{2}, 1)$. Αφού η OD διέρχεται από την αρχή των αξόνων O θα είναι της μορφής $y = \lambda \cdot x$, όπου $\lambda = \frac{y_{\Delta}-y_O}{x_{\Delta}-x_O} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ άρα $(OD): \boxed{y = \frac{2}{3} \cdot x}$

Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (AB) ,

$\lambda_{AB} = \frac{5-(-3)}{1-2} = -8$ οπότε η κάθετη στην (AB) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda = \frac{1}{8}$ και η εξίσωσης της (OM) : $\boxed{y = \frac{1}{8} \cdot x}$

β) Η εξίσωση της ευθείας (AB) θα είναι $y - y_A = \lambda_{AB} \cdot (x - x_A) \Leftrightarrow$

$y - (-3) = -8 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = -8x + 13$.

Για το σημείο τομής M του ύψους (OM) και της ευθείας (AB) θα ισχύει:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{8} \cdot x \\ y = -8x + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot x = -8 \cdot x + 16 \Leftrightarrow 65 \cdot x = 104 \Leftrightarrow x = \frac{104}{65}$$

ή $x = \frac{8}{5}$ και $y = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$ άρα $M(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2) θα είναι $\lambda = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$ και αφού διέρχεται από το $A(0, 1)$ έχουμε $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$.

Για το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ θα ισχύει:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + x + 1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

και $y = 2$ δηλαδή $K(1, 2)$

Γ2. Έστω $\Gamma(x_0, y_0)$ ζητούμενο σημείο. Αφού είναι σημείο της ε_2 θα ισχύει $y_0 = x_0 + 1$.

$$\text{Θέλουμε } d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{|2x_0 + y_0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$$

$$|2x_0 + y_0 - 4| = 6 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 + y_0 - 4 = 6 \text{ ή } 2x_0 + y_0 - 4 = -6 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 + x_0 + 1 - 4 = 6 \text{ ή } 2x_0 + x_0 + 1 - 4 = -6 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 3 \text{ ή } x_0 = -1$$

Οπότε $y_0 = 4$ ή $y_0 = 0$ αντίστοιχα. Άρα $\Gamma(-1,0)$ και $\Delta(3,4)$.

Γ3. Έστω $y^2 = 2px$ η ζητούμενη εξίσωση παραβολής. Αφού διέρχεται από το $K(1,2)$ θα ισχύει $2^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow p = 2$. Άρα, $y^2 = 4x$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής στο $K(1,2)$ θα είναι

$$y \cdot 2 = 2 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ δηλ. η ευθεία } \varepsilon_2.$$

Γ4. α) Η εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής $y^2 = 4x$ είναι $x = -1$ και το σημείο τομής της διευθετούσας και της (ε_1) είναι

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases} \text{ δηλ. } (-1,6)$$

$$\text{οπότε } (\zeta): y - 6 = 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = x + 7.$$

β) Αν Λ σημείο της ευθείας (ζ) με τετμημένη x_0 θα είναι $\Lambda(x_0, x_0 + 7)$. Ακόμη, $\Gamma(-1,0)$, $\Delta(3,4)$.

$$\vec{\Lambda\Gamma} = (-1 - x_0, 0 - x_0 - 7) = (-1 - x_0, -x_0 - 7) \text{ και}$$

$$\vec{\Lambda\Delta} = (3 - x_0, 4 - x_0 - 7) = (3 - x_0, -3 - x_0)$$

$$E_{\Lambda\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} |\det(\vec{\Lambda\Gamma}, \vec{\Lambda\Delta})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -1-x_0 & -x_0-7 \\ 3-x_0 & -3-x_0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -1-x_0 & -x_0-7 \\ 3-x_0 & -3-x_0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |(-1 - x_0)(-3 - x_0) - (-x_0 - 7)(3 - x_0)| =$$

$$\frac{1}{2} |(1 + x_0)(3 + x_0) + (x_0 + 7)(3 - x_0)| =$$

$$\frac{1}{2} |3 + x_0 + 3x_0 + x_0^2 + 3x_0 + 21 - 7x_0 - x_0^2| = \frac{1}{2} |24| = 12 \text{ τ. μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τον κύκλο C_1 βρίσκουμε κέντρο και ακτίνα:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \rho_1 = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$$

όπου $A = -6$, $B = -2$ και $\Gamma = 8$.

$$\text{Άρα } K(3,1) \text{ και } \rho_1 = \frac{\sqrt{36+4-32}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}.$$

Για τον κύκλο C_2 έχουμε $\Lambda(\lambda, \lambda + 2)$ και $\rho_2 = \sqrt{2}$.

Αφού οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά θα ισχύει $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(\lambda - 3)^2 + (\lambda + 2 - 1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 + (\lambda + 1)^2 = 4 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 8 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \text{ οπότε } C_2: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2 \text{ με κέντρο}$$

$\Lambda(1,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{2}$.

Δ2. α) Για τα σημεία τομής του C_1 με τον x' άξονα :

Θέτουμε $y = 0$ οπότε $(x - 3)^2 + (0 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow$
 $x - 3 = 1$ ή $x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 2$. Άρα $A_1(4,0)$, $A_2(2,0)$.

Για τα σημεία τομής του C_2 με τον y' άξονα :

Θέτουμε $x = 0$: $(0 - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow$
 $y - 3 = 1$ ή $y - 3 = -1 \Leftrightarrow y = 4$ ή $y = 2$, δηλαδή $B_1(0,4)$, $B_2(0,2)$.

β) Είναι $A(2,0)$ και $B(0,2)$. Για την ευθεία AB έχουμε

$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$ θα είναι

$y - 0 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2$ ή $(AB): x + y - 2 = 0$.

Η απόσταση $d_1(K, AB) = \frac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ και

η απόσταση $d_2(\Lambda, AB) = \frac{|1+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Αφού $d_1 = d_2 = \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2}$ η ευθεία (AB) είναι κοινή εφαπτομένη των 2 κύκλων.

Δ3. Για το σημείο επαφής των δύο κύκλων θα ισχύει

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2 \end{cases}$$

Άρα, $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$4x = 4y \Leftrightarrow y = x \text{ οπότε}$$

$$(x - 1)^2 + (x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

οπότε και $y = 2$, άρα κοινό σημείο των C_1, C_2 το $N(2,2)$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη ευθεία (ε) θα είναι κάθετη στις KN και LN επομένως κάθετη στην διάκεντρο KL η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{KL} = \frac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \frac{3 - 1}{1 - 3} = -1$$

άρα $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{KL} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$. Έτσι $(\varepsilon): y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x$

που είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$.

β) Έστω $M(x, y)$ σημείο της ευθείας $(\varepsilon): y = x$, άρα $M(x, x)$.

Το KML τρίγωνο είναι ισόπλευρο $\Leftrightarrow (KM) = (KL) = (ML)$

$$\text{όπου } (KM) = \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2},$$

$$(KL) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}, (ML) = \sqrt{(x-1)^2 + (x-3)^2},$$

$$\text{άρα } \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 = 8 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 12, x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 2 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$M(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \text{ και } M'(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}).$$

γ) Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $MKM'\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. Έχουμε

$$\lambda_{KM} = \frac{2+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}-3} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}, (KM) = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$\lambda_{M'\Lambda} = \frac{3-2+\sqrt{3}}{1-2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}, (M'\Lambda) = 2\sqrt{2}$$

άρα αφού έχει 2 απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης οι διαγώνιοι του $MKM'\Lambda$ τέμνονται κάθετα, άρα το $MKM'\Lambda$ είναι ρόμβος.

Σχόλιο: Σε κάποια ερωτήματα σε όλα τα θέματα υπάρχουν περισσότεροι από έναν τρόποι λύσης. Κάθε τρόπος επιστημονικά σωστός είναι αποδεκτός.