

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ2ΓΑ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 26 Απριλίου 2025

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 175.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 36.

Α3. α Λ, β Σ, γ Σ, δ Λ, ε Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x - 2$ παράγοντας $\Leftrightarrow$ το 2 είναι ρίζα $\Leftrightarrow P(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$16 + 4\alpha + 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -9 \quad (1)$$

$$P(-1) = -6 \Leftrightarrow -2 + \alpha - \beta + 2 = -6 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -6 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -9 & (1) \\ \alpha - \beta = -6 & (2) \end{cases} \text{, προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:}$$

$$3\alpha = -15 \Leftrightarrow \alpha = -5 \text{ και αντικαθιστώντας στην (1) όπου } \alpha = -5 \text{ προκύπτει } \beta = 1$$

Β2. Κάνοντας σχήμα Horner στη θέση 2 έχουμε

$$(x - 2)(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

Β3. $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - x - 1) < 0$ Από τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

$$\text{για } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \epsilon\varphi(-\varphi)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi) \cdot \sigma\varphi(\pi + \varphi)} = -1 \Leftrightarrow \frac{-\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (-\epsilon\varphi\varphi)}{-\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi} = -1 \Leftrightarrow -\epsilon\varphi^2\varphi = -1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \epsilon\varphi\varphi > 0 \end{matrix} \quad \epsilon\varphi^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Γ2. α) Για $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega \in (0,1)$, και

$$2(\ln(\eta\mu\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu\omega)) = 2\ln(\eta\mu\omega) + 2\ln(\sigma\upsilon\nu\omega) = \ln(\eta\mu^2\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu^2\omega) = \ln(\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \ln(\eta\mu^2\omega \cdot (1 - \eta\mu^2\omega)) = \ln(\eta\mu^2\omega - \eta\mu^4\omega)$$

β) $2(\ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)) = \ln 3 - 4\ln 2$, αφού ζητάμε λύσεις $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

η εξίσωση, λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, ισοδυναμεί με την

$$\ln(\eta\mu^2 x - \eta\mu^4 x) = \ln 3 - \ln 2^4 = \ln \frac{3}{16} \Leftrightarrow (\text{από το 1-1 της λογαριθμικής})$$

$$\eta\mu^2 x - \eta\mu^4 x = \frac{3}{16} \Leftrightarrow 16\eta\mu^4 x - 16\eta\mu^2 x + 3 = 0.$$

Θέτουμε $\eta\mu^2 x = \rho$, οπότε για $\rho \in (0,1)$ έχουμε $16\rho^2 - 16\rho + 3 = 0$ με λύσεις

$$\rho = \frac{1}{4}, \rho = \frac{3}{4} \quad \text{οπότε} \quad \eta\mu^2 x = \frac{1}{4}, \eta\mu^2 x = \frac{3}{4} \quad \text{και αφού} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{είναι}$$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}, \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{άρα} \quad x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}$$

Γ3. Αντικαθιστώντας τους γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς το σύστημα γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y = 1 \quad (\cdot 2) \\ \sqrt{3} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y = 2\sqrt{3} \quad (\cdot 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \sqrt{2}y = 2 \\ 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6\sqrt{3} \end{array} \right\} \cdot (-3\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3\sqrt{3}x + 3\sqrt{6}y = -6\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6\sqrt{3} \end{array} \right\} \quad \text{και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε} \quad (3\sqrt{6} - \sqrt{3})y = 0$$

επομένως $y=0$. (Για τους σκοπούς αυτού του διαγωνίσματος προτείνουμε να θεωρηθεί προφανές ότι $3\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq 0$. Αν ωστόσο το θεωρείτε σκόπιμο τότε: $3\sqrt{6} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$3\sqrt{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (\text{για θετικά μέλη}) \quad (3\sqrt{6})^2 = \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 6 = 3 \Leftrightarrow 54 = 3 \quad \text{Ψευδής,}$$

επομένως $3\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq 0$).

Για $y=0$ η πρώτη εξίσωση δίνει $\frac{1}{2}x = 1$ ή $x = 2$

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (2, 0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 \geq 2 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει για κάθε} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με το ίσον να ισχύει}$$

μόνο για $x=2$. Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $x=2$ την τιμή $f(2)=2$.

β) Αρχικά έχουμε

$$g(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x + 6 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 6, x \in \mathbb{R}. \text{ Θέτουμε } 2^x = \omega, \omega > 0$$

Έτσι ο τύπος του δεύτερου μέλους γίνεται $\omega^2 - 4\omega + 6$ για τον οποίο γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι παρουσιάζει, στους πραγματικούς αριθμούς άρα και στο διάστημα $(0, +\infty)$, ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $\omega=2$ την τιμή 2.

$\omega=2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $x=1$ την τιμή $g(1)=2$

Σχόλιο: Εν όψη Γ' λυκείου προτείνουμε και τον ακόλουθο τρόπο παρουσίασης της λύσης:

Έχουμε $g(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x + 6 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 6 = f(2^x)$. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση που η ανεξάρτητη μεταβλητή της είναι 2 δηλαδή $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Τότε η ελάχιστη τιμή της είναι η $g(1) = f(2^1) = f(2) = 2$

Δ2. α) Για το πεδίο ορισμού της h απαιτούμε $8^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow 8^{x-1} > 1 \Leftrightarrow 8^{x-1} > 8^0$.

Είναι $8 > 1$ οπότε η εκθετική είναι γνησίως αύξουσα άρα $x-1 > 0$ ή $x > 1$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της h είναι το διάστημα $(1, +\infty)$

Για το πεδίο ορισμού της φ απαιτούμε $g(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 2$.

Από την προηγούμενη μελέτη γνωρίζουμε ότι $g(x) \geq 2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$. Για κάθε άλλο $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η $g(x) > 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

β) Η τομή των πεδίων ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι το διάστημα $\Delta = (1, +\infty)$

Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $h(x) = \varphi(x)$, έχει λύση στο Δ .

$$h(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \log(8^{x-1} - 1) + 3 \log 2 = \log(g(x) - 2) \Leftrightarrow$$

$$\log(8^{x-1} - 1) + \log 2^3 = \log(g(x) - 2) \Leftrightarrow \log[(8^{x-1} - 1) \cdot 8] = \log(g(x) - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8^x - 8 = g(x) - 2 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 8 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 6 - 2 \Leftrightarrow (2^x)^3 - (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 12 = 0$$

Θέτουμε $\omega = 2^x$, $\omega > 0$, οπότε προκύπτει η πολωνυμική εξίσωση

$\omega^3 - \omega^2 + 4\omega - 12 = 0$. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner στη θέση $\omega=2$ διαπιστώνουμε ότι η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $(\omega - 2)(\omega^2 + \omega + 6) = 0$ από την οποία

προκύπτει η μοναδική λύση $\omega=2$, δεκτή ως θετική. Τότε είναι $\omega=2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Όμως η τιμή $x=1$ δεν ανήκει στο Δ επομένως η εξίσωση $h(x) = \varphi(x)$ είναι τελικά αδύνατη και κατά συνέπεια οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων δεν έχουν κοινό σημείο.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

Δ3. α) Η μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η συνάρτηση

$q(x) = 2\eta\mu(\pi(x+c))$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το 2 η οποία είναι η ελάχιστη που μπορεί να πάρει η συνάρτηση g . Δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $q(x) \leq 2 \leq g(x)$ (1).

Για να έχουν κοινό σημείο οι δύο γραφικές παραστάσεις πρέπει να έχει λύση η εξίσωση $q(x) = g(x)$, δηλαδή πρέπει να υπάρχει τιμή του x για την οποία να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες στην (1). Το δεύτερο ίσον στην (1) ισχύει μόνο για $x=1$ όπως έχουμε δείξει, άρα απαιτούμε να ισχύει και η $q(1)=2$.

$$q(1)=2 \Leftrightarrow 2\eta\mu(\pi(1+c))=2 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi(1+c))=1 \Leftrightarrow \pi(1+c) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c+1 = 2\kappa + \frac{1}{2}$$

$$c = 2\kappa - \frac{1}{2}, \text{ για } \kappa \in \mathbb{Z}$$

β) Για κάθε $x \neq 1$ είναι $g(x) > 2 \geq q(x)$ άρα $g(x) > q(x)$ οπότε και $g(x) \neq q(x)$.

Επομένως το μόνο σημείο που μπορεί να είναι κοινό είναι το (1,2) και αυτό συμβαίνει μόνο αν $c = 2\kappa - \frac{1}{2}$, για $\kappa \in \mathbb{Z}$. Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του c , ούτε αυτό το σημείο

είναι κοινό. Συνεπώς οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Έχει ενδιαφέρον η Γεωμετρική ερμηνεία του Δ3.

Στο πρώτο από τα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και q για $c \neq 2\kappa - \frac{1}{2}$, για $\kappa \in \mathbb{Z}$, ενώ στο δεύτερο βλέπουμε τις

γραφικές τους παραστάσεις για $c = 2\kappa - \frac{1}{2}$, για $\kappa \in \mathbb{Z}$. Οι τιμές αυτές του c προκαλούν

οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης q τέτοια, ώστε κάποιο από τα σημεία της με τεταγμένη 2 να συμπίπτει με το σημείο (1,2) το οποίο είναι το μοναδικό σημείο που μπορεί να είναι κοινό.

