ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 26 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για $0 < α \neq 1$ και για οποιουσδήποτε $\theta_1,\theta_2 > 0$ ισχύει:

$$log_a(\theta_1\theta_2) = log_a\theta_1 + log_a\theta_2$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α λέγεται περιττή;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα σε αυτό το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η συνάρτηση φ(χ) = εφχ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα yy’.

β. Για κάθε $α>1$ και $x > 1$ ισχύει ότι $log_a x > 0$.

γ. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών .

δ. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται για κάθε $α \in \mathbb{R}$.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ με $α > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 2x5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$, $\alpha,\beta \in R$

Β1. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x - 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x + 1 είναι -6 , να βρείτε τους $\alpha,\beta \in R$.

Μονάδες 8

Β2. Αν α = -5 και β = 1, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρείτε τη γωνία $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \varepsilon\varphi(-\varphi)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi) \cdot \sigma\varphi(\pi + \varphi)} = -1$$

Μονάδες 6

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$2\left(\ln(\eta\mu\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu\omega)\right) = \ln\left(\eta\mu^2\omega - \eta\mu^4\omega\right)$$

Μονάδες 6

β) Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$2\left(\ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)\right) = \ln 3 - 4\ln 2 \qquad (1)$$

Μονάδες 8

Γ3. Αν $\varphi = \frac{\pi}{4}$ και η εξίσωση (1) έχει λύσεις $x_1 = \frac{\pi}{6}$ και $x_2 = \frac{\pi}{3}$,

να λύσετε το σύστημα $\Sigma: \begin{cases} (\eta\mu x_1)\cdot x - (\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot y = 1 \\ (\varepsilon\varphi x_2)\cdot x - (\sigma\varphi x_2)\cdot y = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x=2 την τιμή f(2)=2.

Μονάδες 3

β. Αν η συνάρτηση $g(x) = 4^x - 4\cdot 2^x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο να βρείτε τη θέση και την τιμή του.

Μονάδες 5

Αν η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x=1 την τιμή g(1)=2 , τότε:

Δ2. α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \log(8^{x-1} - 1) + 3\log 2$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \log\left(g(x) - 2\right)$.

Μονάδες 4

β. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και φ έχουν κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Δ3. α. Να βρείτε τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x) = 2\eta\mu\left(\pi(x + c)\right)$, $x \in \mathbb{R}$ έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων q και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ