

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2Θ(α)**

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α****A1. α)** Σχολικό βιβλίο σελίδα 38**β)** Σχολικό βιβλίο σελίδα 38**A2.**

Στήλη Α	1	2	3	4	5
Στήλη Β	Δ	Γ	Β	Ε	ΣΤ

A3. α) Σωστό**β)** Λάθος**γ)** Σωστό**δ)** Λάθος**ε)** Σωστό**ΘΕΜΑ Β****B1.** Έχουμε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$

$$\text{Οπότε } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

B2. Επειδή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2 \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot \kappa$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$

$$\text{έχουμε } -2 + 2\sqrt{3} \cdot \kappa = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot \kappa = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = \sqrt{3}$$

B3. Επειδή τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}$ έχουν αρχή, την αρχή των αξόνων Ο έχουμε $A(-2, 2\sqrt{3})$ και $B(1, \sqrt{3})$. Έστω $M(x, 0)$ σημείο του $x'x$ άξονα. Τα Α, Β, Μ συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{AB} // \vec{BM}$ με

$$\vec{AB} = (1 - (-2), \sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = (3, -\sqrt{3}) \text{ και } \vec{BM} = (x - 1, -\sqrt{3})$$

$$\text{Έτσι } \vec{AB} // \vec{BM} \Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{BM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ x-1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3} +$$

$$\sqrt{3}(x-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4, \text{ άρα } M(4, 0).$$

B4. Γνωρίζουμε ότι $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16$ και $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 2^2 = 4$ οπότε

$$\frac{\vec{x} - \vec{a}}{16} = \frac{\vec{x} - \vec{\beta}}{4} \Leftrightarrow 4(\vec{x} - \vec{a}) = 16(\vec{x} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} - \vec{a} = 4\vec{x} - 4\vec{\beta} \Leftrightarrow 3\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$3\vec{x} = -(-2, 2\sqrt{3}) + 4(1, \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$3\vec{x} = (2, -2\sqrt{3}) + (4, 4\sqrt{3}) \Leftrightarrow 3\vec{x} = (6, 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ακόμη, $\lambda_{\vec{x}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε αν $\hat{\omega}$ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{x}$ με

τον $x'x$ άξονα θα είναι $\varepsilon\varphi\hat{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ άρα $\hat{\omega} = \frac{\pi}{6}$ ή $\hat{\omega} = \frac{7\pi}{6}$. Επειδή όμως

$$\vec{x} = (6, 2\sqrt{3}) \text{ συμπεραίνουμε ότι } \hat{\omega} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 5) \cdot 2 + 2 \cdot \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{3}$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\vec{\beta} = 2\vec{a}\vec{\beta} + 10 + \frac{2}{3}\vec{a}\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{a}\vec{\beta} = 6\vec{a}\vec{\beta} + 30 + 2\vec{a}\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\vec{a}\vec{\beta} = 30 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{\beta} = -6$$

Γ2. Επειδή $(2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}) \perp (5\vec{\beta} - 7\vec{\gamma})$ ισοδύναμα παίρνουμε

$$\begin{aligned}(2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}) \cdot (5\vec{\beta} - 7\vec{\gamma}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10\vec{\beta}^2 - 14\vec{\beta}\vec{\gamma} + 15\vec{\beta}\vec{\gamma} - 21\vec{\gamma}^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10|\vec{\beta}|^2 + \vec{\beta}\vec{\gamma} - 21|\vec{\gamma}|^2 &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

$$\text{όπου } |\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{36}{9}} = \sqrt{8} \Rightarrow$$

$$|\vec{\beta}|^2 = 8 \text{ και } |\vec{\gamma}| = \frac{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}{3} = -\frac{-6}{3} = 2$$

$$\text{Έτσι η (1) δίνει : } 10 \cdot 8 + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} - 21 \cdot 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 80 + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} - 84 = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 4$$

$$\text{Ακόμη } \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \cdot \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) \Leftrightarrow \sin(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}|} = \frac{4}{\sqrt{8} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{άρα } (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Γ3. Αν $\vec{\gamma} = (x, y)$ τότε $|\vec{\gamma}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$$2 = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Επίσης $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 4$ και αφού για $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -6$ έχουμε $\vec{\beta} = (2, -2)$ έχουμε

$$2x - 2y = 4 \Leftrightarrow x - y = 2 \Leftrightarrow x = 2 + y.$$

$$\text{Άρα } x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow 4 + 4y + y^2 + y^2 = 4$$

$$2y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow 2y(y + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 0 \text{ ή } y = -2.$$

Για $y = 0$ παίρνουμε $x = 2$ άρα $\vec{\gamma} = (2, 0)$ που απορρίπτεται.

Για $y = -2$ παίρνουμε $x = 0$ άρα $\vec{\gamma} = (0, -2)$.

Γ4. Έχουμε $18 \cdot \vec{\delta}^2 + 8 \leq -2 \cdot (-6) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}) \Leftrightarrow$

$$18 \vec{\delta}^2 + 8 - 12 \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} \leq 0 \Leftrightarrow 2(9 \vec{\delta}^2 - 6 \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \vec{\delta}^2 - 6 \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \vec{\delta}^2 - 6 \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} + \vec{\gamma}^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (3\vec{\delta} - \vec{\gamma})^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |3\vec{\delta} - \vec{\gamma}|^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |3\vec{\delta} - \vec{\gamma}| = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\vec{\delta} - \vec{\gamma} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{\delta} = \frac{1}{3}\vec{\gamma} \text{ άρα } \vec{\delta} // \vec{\gamma}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Οι συντεταγμένες του σημείου Γ επαληθεύουν τις εξισώσεις της διαμέσου ΓΜ και του ύψους ΓΔ άρα :

$$\Gamma M: -6 = -2 \cdot 7 + \kappa + 3 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

$$\Gamma \Delta: -6 = (\lambda - 3) \cdot 7 + \kappa - 4 \Leftrightarrow$$

$$-6 = 7\lambda - 21 + \kappa - 4 \stackrel{\kappa=5}{\Leftrightarrow} 7\lambda = 14 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Άρα } \Gamma M: y = -2 \cdot x + 8 \text{ και } \Gamma \Delta: y = -x + 1.$$

- Δ2.** Για την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΑΓ:

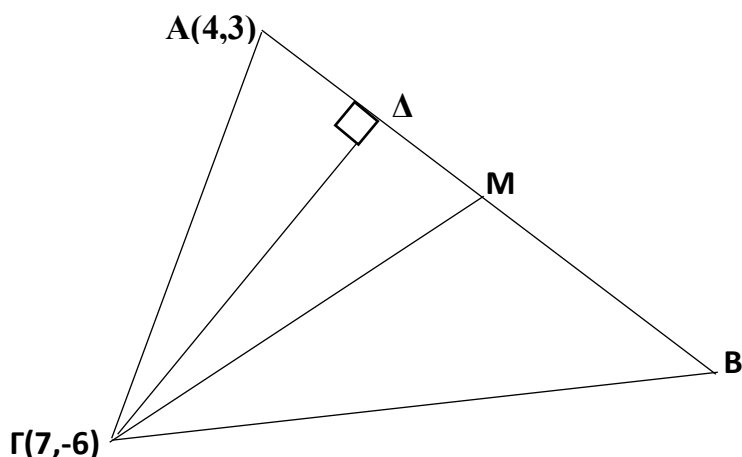
$$\lambda_{AG} = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{-6 - 3}{7 - 4} = \frac{-9}{3} = -3$$

Διέρχεται και από το Α(4,3) άρα

$$y - 3 = -3(x - 4) \Leftrightarrow \boxed{y = -3x + 15} : AG$$

Για την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΑΒ:

Πρόχειρο σχήμα



Η ΓΔ $\perp$ ΑΒ άρα

$\lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \lambda_{AB} = -1$ και επειδή
 $\lambda_{\Gamma\Delta} = -1$ έχω ότι $\lambda_{AB} = 1$
και αφού διέρχεται από το Α(4,3), έχω :

$$y - 3 = 1(x - 4)$$

$$AB: \boxed{y = x - 1}$$

Δ3. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου M ως σημείο τομής των ευθειών $ΓΜ$ και $ΑΒ$ από τη λύση του

$$(Σ) \begin{cases} AB : y = x - 1 \\ ΓΜ : y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 = -2x + 8 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

και $y = 2$. Άρα $M(3,2)$.

Επειδή το M είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , αν $B(x_B, y_B)$ τότε

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{4 + x_B}{2} \text{ και}$$

$$2 = \frac{3 + y_B}{2} \Leftrightarrow 6 = 4 + x_B \text{ και } 4 = 3 + y_B \Leftrightarrow x_B = 2, y_B = 1 \text{ άρα } B(2,1).$$

Δ4. Για $K(x, y)$ και $A(4,3), B(2,1), M(3,2)$ και $Γ(7,-6)$ έχουμε:

$$\overrightarrow{AK} = (x - 4, y - 3)$$

$$\overrightarrow{BK} = (x - 2, y - 1)$$

$$\overrightarrow{KM} = (3 - x, 2 - y)$$

$$\overrightarrow{ΓK} = (x - 7, y + 6) \text{ οπότε}$$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{ΓK} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 4) \cdot (x - 2) + (y - 3) \cdot (y - 1) + (3 - x) \cdot (x - 7) + (2 - y) \cdot (y + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 + y^2 - 4y + 3 - x^2 + 10x - 21 - y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8y = -2 \Leftrightarrow 2x - 4y = -1 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK} = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{BK}| \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{BK} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AK} // \overrightarrow{BK} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 4 & y - 3 \\ x - 2 & y - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 4) \cdot (y - 1) - (x - 2) \cdot (y - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$xy - 4y - x + 4 - xy + 3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2y + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1 \quad (2)$$

$$\text{Λόγω της (2) η (1)} \Leftrightarrow 2x - 4(x - 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4x + 4 = -1 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ και } y = \frac{3}{2}.$$

Δηλαδή $K(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$. Τότε $\overrightarrow{AK} = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ και $\overrightarrow{BK} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ οπότε

$\overrightarrow{AK} = -3\overrightarrow{BK}$ άρα τα $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BK}$ είναι αντίρροπα, άρα δεν υπάρχει σημείο K το οποίο να ικανοποιεί τις δοθείσες σχέσεις.