

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024**
Β΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2Θ(α)**

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 83
A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 89
A3. ΣΩΣΤΟ, εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ.126.
A4. α) ΣΩΣΤΟ
β) ΛΑΘΟΣ
γ) ΣΩΣΤΟ
δ) ΛΑΘΟΣ
ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε :

$$\vec{AB} = (\chi_B - \chi_A, \psi_B - \psi_A) = (5 - 2, 3 - 3) = (3, 0) \quad \text{και}$$

$$\vec{AG} = (\chi_G - \chi_A, \psi_G - \psi_A) = (2 - 2, 6 - 3) = (0, 3)$$

$$\text{Συνεπώς } \vec{AB} \cdot \vec{AG} = (3, 0) \cdot (0, 3) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0, \text{ άρα } \vec{AB} \perp \vec{AG}$$

B2. Έχουμε : $\vec{BA} = (-3, 0)$ και $\vec{BG} = (\chi_G - \chi_B, \psi_G - \psi_B) = (2 - 5, 6 - 3) = (-3, 3)$

$$\text{Επομένως } \vec{BA} \cdot \vec{BG} = (-3, 0) \cdot (-3, 3) = (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot 3 = 9 + 0 = 9$$

Επίσης έχουμε :

$$|\vec{BA}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{και}$$

$$|\vec{BG}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Άρα : } \cos(\widehat{BAG}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BG}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BG}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Επομένως : } \widehat{BAG} = \frac{\pi}{4}$$

Ομοίως έχουμε : $\vec{GA} = (0, -3)$ και $\vec{GB} = (3, -3)$

$$\text{με } \vec{GA} \cdot \vec{GB} = (0, -3) \cdot (3, -3) = 3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$\text{όπου } |\vec{GA}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{και}$$

$$|\vec{GB}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Άρα : } \cos(\widehat{GAB}) = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{GB}}{|\vec{GA}| \cdot |\vec{GB}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Επομένως : } \widehat{GAB} = \frac{\pi}{4}$$

B3. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Είναι :

$$\chi_M = \frac{\chi_B + \chi_G}{2} = \frac{5 + 2}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{και} \quad \psi_M = \frac{\psi_B + \psi_G}{2} = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Έχουμε επίσης : } \lambda_{BG} = \frac{\psi_G - \psi_B}{\chi_G - \chi_B} = \frac{6 - 3}{2 - 5} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\text{Όμως η μεσοκάθετος (ε) της ΒΓ είναι κάθετη στη ΒΓ άρα : } \lambda_\epsilon = \frac{-1}{\lambda_{BG}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Τελικά η μεσοκάθετος (ε) της ΒΓ έχει εξίσωση :

$$\psi - \psi_M = \lambda_\epsilon (\chi - \chi_M) \Leftrightarrow \psi - \frac{9}{2} = 1 \cdot \left(\chi - \frac{7}{2} \right) \Leftrightarrow \psi - \frac{9}{2} = \chi - \frac{7}{2} \Leftrightarrow \psi = \chi + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \psi = \chi + \frac{2}{2} \Leftrightarrow \psi = \chi + 1$$

B4. Έχουμε βρει ότι το μέσο Μ της ΒΓ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ που είναι και το κέντρο του κύκλου. Η ακτίνα του κύκλου θα είναι :

$$\rho = \frac{(BG)}{2} = \frac{\sqrt{(\chi_{\Gamma} - \chi_B)^2 + (\psi_{\Gamma} - \psi_B)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(2-5)^2 + (6-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{9+9}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Άρα ο κύκλος θα έχει εξίσωση :

$$\left(\chi - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\psi - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\chi - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\psi - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

Θέτω $\chi = 2$ και $\psi = 3$, κι έχω :

$$\left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{18}{4} = \frac{9}{2}, \text{ που ισχύει επομένως το σημείο Α ανήκει στον κύκλο.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. (i). Έχουμε $A = -8$, $B = 0$ και $\Gamma = 8$. Οπότε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-8)^2 + 0 - 4 \cdot 8 = 64 - 32 = 32 > 0 \text{ άρα η } C_1 \text{ παριστάνει κύκλο με}$$

$$\text{κέντρο } K\left(\frac{8}{2}, 0\right) \text{ ή } K(4, 0) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{\sqrt{16 \cdot 2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

(ii) Έχουμε $x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ οπότε η C_2 παριστάνει υπερβολή. Επιπλέον

$\alpha = \beta = 2$ άρα είναι και ισοσκελής. Επίσης $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 = 4 + 4 = 8$ δηλαδή $\gamma = 2\sqrt{2}$ συνεπώς οι εστίες είναι τα σημεία $E(2\sqrt{2}, 0), E'(-2\sqrt{2}, 0)$.

Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$ με $\alpha = \beta = 2$, άρα $\varepsilon_1 : y = x$ και $\varepsilon_2 : y = -x$

$$\text{Η εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Γ2. Επειδή $d(k, \varepsilon_1) = \frac{|4-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \rho$ και
 $d(k, \varepsilon_2) = \frac{|4+0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \rho$, οι ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της C_2 εφάπτονται
στον κύκλο C_1 .

Γ3. Έχουμε $A(2,0)$, $A'(-2,0)$. Το σημείο B είναι το σημείο τομής της ασύμπτωτης
με θετική κλίση δηλαδή της $\varepsilon_1: y=x$ (αφού $\lambda=1>0$) και του κύκλου C_1 . Με
αντικατάσταση όπου $y=x$ στην εξίσωση του κύκλου έχουμε
 $x^2 + x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2$ άρα και $y=2$ οπότε $B(2,2)$.

Συνεπώς

$$E = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AA'})| = \frac{1}{2} |0-8| = \frac{8}{2} = 4\tau, \mu$$

Γ4. Οι εστίες της έλλειψης ταυτίζονται με τις εστίες της υπερβολής άρα
 $E(2\sqrt{2}, 0), E'(-2\sqrt{2}, 0)$. Επίσης, αν ε' η εκκεντρότητα της έλλειψης τότε

$$\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Συνεπώς, } \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\alpha'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha' = 4 \text{ και}$$

$$\beta' = \sqrt{\alpha'^2 - \gamma'^2} = \sqrt{16-8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}. \text{ Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$.

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $C_1: y^2 = 8x$.

Δ2. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων είναι

$$C_2: x^2 + y^2 = 2.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C_1 στο σημείο της $M(x_1, y_1)$
είναι

$$yy_1 = 4(x + x_1) \Leftrightarrow 4x - yy_1 + 4x_1 = 0.$$

Για να είναι εφαπτομένη και του κύκλου C_2 πρέπει

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 0 - y_1 \cdot 0 + 4x_1|}{\sqrt{4^2 + y_1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|4x_1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16 + y_1^2} \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2 = 2(16 + y_1^2) \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2 = 32 + 2y_1^2 .$$

Το σημείο Μ ανήκει σε αυτή άρα έχουμε $y_1^2 = 8x_1$, οπότε

$$16x_1^2 - 16x_1 - 32 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_1 + 1) = 0 .$$

Δεκτή η λύση $x_1 = 2$.

Για $x_1 = 2$ από (1) έχουμε $y_1^2 = 16 \Leftrightarrow y_1 = 4$ ή $y_1 = -4$.

Οπότε τα κοινά σημεία θα είναι Μ (2,4) ή Μ' (2, -4)

Οι κοινές εφαπτόμενες λοιπόν θα είναι:

$$\varepsilon_1: 4x - 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2: 4x + 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0 .$$

Δ3. Η εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από την εστία Ε(2,0) της παραβολής έχει εξίσωση $\varepsilon: y - 0 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow$

$$\lambda x - y - 2\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \varepsilon': x=2 .$$

Η ευθεία ε' με εξίσωση $x=2$ απορρίπτεται αφού $\rho = \sqrt{2} < 2$ οπότε είναι εξωτερική του κύκλου .

Για να είναι η ε εφαπτόμενη του κύκλου C_2 πρέπει

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|-2\lambda| = \sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 = 2\lambda^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \pm 1 .$$

Για $\lambda = -1$, έχουμε $\varepsilon_3: y - 0 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

Για $\lambda = 1$, έχουμε $\varepsilon_4: y - 0 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 2$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ που αποτελούν τις κορυφές Α, Β, Γ αντίστοιχα του τετράπλευρου.

Λύνουμε το σύστημα των $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$, όπου βρίσκουμε $x=0$ και $y=2$

Οπότε Α(0,2).

Όμοια λύνουμε τα συστήματα των $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ και βρίσκουμε αντίστοιχα τα σημεία Β(-2,0), Γ(2,0) .

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 = \lambda_4$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_4$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ άρα $\varepsilon_2 // \varepsilon_3$

Επίσης $\lambda_1 \lambda_3 = -1$ συνεπώς $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$.

$$(AB) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{και}$$

$$(BG) = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Επομένως είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ,άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.