

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024  
Α΄ ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ2ΓΑ(α)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη τριγωνομετρικής ταυτότητας, σχολικό βιβλίο σελίδα 60.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35.

- Α3. α) Λάθος  
β) Σωστό  
γ) Λάθος  
δ) Σωστό  
ε) Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. α)} \text{ Έχουμε } \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Big| 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο εξισώσεων παίρνουμε  $3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$  και με αντικατάσταση στην εξίσωση  $-\alpha + 2\beta = 1 \Leftrightarrow -1 + 2\beta = 1 \Leftrightarrow 2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$ .

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ .

$$\text{β)} \text{ Έχουμε } \begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ -6\alpha + 3\beta = -3 \end{cases} \Big| 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 3\beta = 3 \\ -6\alpha + 3\beta = -3 \end{cases} \Big| -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 3\beta = 3 \\ 6\alpha - 3\beta = 3 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Ακόμη, η λύση  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  επαληθεύει την κοινή εξίσωση  $6 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta = 3$  άρα είναι μια λύση από τις άπειρες.

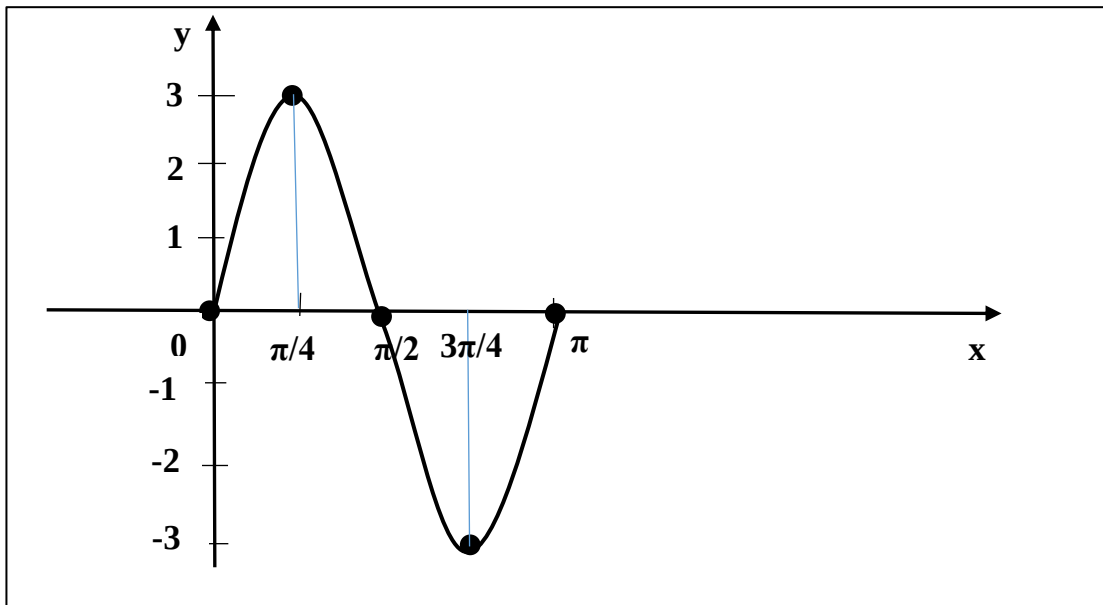
**B2.** Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1$ , έχουμε :

$$f(x) = 3 \cdot \eta\mu 2x, x \in \mathbb{R}$$

**α)**  $\min_f = -3, \max_f = 3, T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

**β)**

|                             |   |                 |                 |                  |        |
|-----------------------------|---|-----------------|-----------------|------------------|--------|
| $x$                         | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$  |
| $2x$                        | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$           | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\eta\mu 2x$                | 0 | 1               | 0               | -1               | 0      |
| $f(x) = 3 \cdot \eta\mu 2x$ | 0 | 3               | 0               | -3               | 0      |



### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

$$\eta\mu(3\pi + x) = \eta\mu(2\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(5\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(4\pi + \pi - x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Οπότε

$$f(x) = \eta\mu x - (-\eta\mu x) + 2(-\sigma\upsilon\nu x) = 2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x = 2(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$$

**Γ2. α)**  $g(x) = f(x) \cdot f(-x) = 2(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot 2[\eta\mu(-x) - \sigma\upsilon\nu(-x)] =$   
 $4(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = -4(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) =$   
 $-4(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) = -4(\eta\mu^2 x - 1 + \eta\mu^2 x) = -4(2\eta\mu^2 x - 1) =$   
 $= 4(1 - 2\eta\mu^2 x).$

**β)** Για  $x \in \mathbb{R}$  το  $-x \in \mathbb{R}$  και  $g(-x) = f(-x) \cdot f(x) = g(x)$  άρα η  $g$  άρτια.

**Γ3.** Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε :

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow 4(1 - 2\eta\mu^2 x) = 2 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\eta\mu^2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu x = -\frac{1}{2}$$

- $\eta\mu x = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$   
 $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ή }$   
 $x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

Άρα το σύνολο λύσεων είναι

$$\left\{ 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}, 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \right\} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

**Γ4.** Θα ελέγξουμε αν υπάρχει ακέραιος αριθμός  $\kappa$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{689\pi}{6}.$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε  $12\kappa\pi + 5\pi = 689\pi \Leftrightarrow 12\kappa\pi = 684\pi \Leftrightarrow$   
 $\kappa = 57$  που είναι ακέραιος αριθμός.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Αφού η  $C_f$  διέρχεται από το  $A(1, \alpha)$  θα ισχύει  $f(1) = \alpha$  οπότε :

$$(3 - \alpha^2) \cdot 1 - 1 = \alpha \Leftrightarrow 3 - \alpha^2 - 1 = \alpha \Leftrightarrow 0 = \alpha^2 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -2.$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση  $f(x) = a \cdot x + \beta$ ,  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$  όταν  $\alpha > 0$  είναι γνησίως αύξουσα ενώ όταν  $\alpha < 0$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Για  $\alpha = 1$  έχω  $f(x) = 2x - 1$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Για  $\alpha = -2$  έχω  $f(x) = -x - 1$  η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα  $\boxed{\alpha = -2}$

**Δ2.** Το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι  $A = \mathbb{R}$  αφού  $x^2 + 4 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έστω  $x \in \mathbb{R}$  τότε  $-x \in \mathbb{R}$  και

$$g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 4} = \frac{-4x}{x^2 + 4} = -g(x)$$

άρα η  $g$  είναι περιττή στο  $\mathbb{R}$ .

Θα αποδείξουμε ότι  $g(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(2) = 1$ .

Έχω  $g(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2 + 4} \leq 1 \Leftrightarrow 4x \leq x^2 + 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$  που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  οπότε ισχύει και η αρχική ανίσωση  $g(x) \leq 1$ .

Ακόμη το 1 είναι τιμή της  $g$  για  $x = 2$  αφού  $g(2) = \frac{4 \cdot 2}{2^2 + 4} = \frac{8}{8} = 1$ .

Άρα η  $g$  παρουσιάζει για  $x = 2$  μέγιστο με μέγιστη τιμή την 1.

**Δ3.** α΄ τρόπος Αφού η  $f$  είναι γνήσια φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  έχουμε :

$$f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) < f(4\eta\mu x) \Leftrightarrow 5 - \sigma\upsilon\nu^2 x > 4\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$5 - (1 - \eta\mu^2 x) > 4\eta\mu x \Leftrightarrow 4 + \eta\mu^2 x > 4\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 4 > 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - 2)^2 > 0$$

που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  αφού  $\eta\mu x - 2 \neq 0$ .

Άρα ισχύει και η αρχική ανίσωση.

β΄ τρόπος Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  αντικαθιστώντας στην  $f(x) = -x - 1$  παίρνουμε

$$f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) < f(4\eta\mu x) \Leftrightarrow -(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) - 1 > -4\eta\mu x - 1 \Leftrightarrow$$

$$-5 + \sigma\upsilon\nu^2 x < -4\eta\mu x \Leftrightarrow -5 + 1 - \eta\mu^2 x < -4\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$0 < \eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 4 \Leftrightarrow 0 < (\eta\mu x - 2)^2$$

που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  αφού  $\eta\mu x - 2 \neq 0$ . Άρα ισχύει και η αρχική ανίσωση.

γ' τρόπος Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την  $g(x) < 1$  (αφού  $\eta\mu x \neq 2$ ). Θέτοντας όπου  $x$  το  $\eta\mu x$  παίρνουμε

$$g(\eta\mu x) < 1 \Leftrightarrow \frac{4\eta\mu x}{\eta\mu^2 x + 4} < 1 \Leftrightarrow 4\eta\mu x < \eta\mu^2 x + 4 \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu x < 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 4 \Leftrightarrow 4\eta\mu x < 5 - \sigma\upsilon\nu^2 x \xleftrightarrow{\eta\ f\ \phi\theta\iota\nu\sigma\sigma\alpha}$$

$$f(4\eta\mu x) > f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x).$$

**Δ4.** Έχουμε  $\frac{5\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} = \pi$  άρα οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα δηλαδή

$$\eta\mu \frac{3\pi}{8} = \eta\mu \frac{5\pi}{8}.$$

Άρα

$$g\left(-\eta\mu \frac{3\pi}{8}\right) = g\left(-\eta\mu \frac{5\pi}{8}\right) = -g\left(\eta\mu \frac{5\pi}{8}\right)$$

αφού η  $g$  περιττή συνάρτηση.

Επίσης  $g(-2024) = -g(2024)$ . Άρα με αντικατάσταση η εξίσωση γίνεται :

$$g(2024) \cdot x^2 - g\left(\eta\mu \frac{5\pi}{8}\right) - g(2024) + g\left(\eta\mu \frac{5\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(2024) \cdot x^2 - g(2024) = 0 \Leftrightarrow g(2024) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow g(2024) = 0$$

$$\text{ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ αφού η } g(2024) = 0 \text{ απορρίπτεται.}$$