ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α2.

α) Λάθος	β) Λάθος	γ) Σωστό	δ)Σωστό	ε) Λάθος

Α3.

α) $\ln e = 1$	β) $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$	γ) $\log_\alpha 1 = 0$	δ) $\log_\alpha \alpha^x = x$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού ο αριθμός 2 είναι ρίζα του $P(x)$ θα ισχύει $P(2)=0$

Δηλαδή $P(2)=0 \Leftrightarrow 16-8\alpha-12+2\beta-4=0 \Leftrightarrow 2\beta=8\alpha \Leftrightarrow \boxed{\beta=4\alpha}$ **(1)**

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι -12 άρα

$P(-1)=-12 \Leftrightarrow 1+\alpha-3-\beta-4=-12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha-\beta=-6}$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων **(1)** και **(2)** έχουμε

$$\begin{cases} \beta=4\alpha \\ \alpha-\beta=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=4\alpha \\ \alpha-4\alpha=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=4\alpha \\ -3\alpha=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=8 \\ \alpha=2 \end{cases}$$

Β2. Το πολυώνυμο για $\alpha=2$ και $\beta=8$ γίνεται $P(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$

Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-2$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

1	−2	−3	8	−4	2
↓	2	0	−6	4	
1	0	−3	2	0	

Άρα $P(x)=(x-2)(x^3-3x+2)$

Το πολυώνυμο x^3-3x+2 έχει ρίζα την $x=1$ άρα το παραγοντοποιούμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner

1	0	−3	2	1
↓	1	1	−2	
1	1	−2	0	

$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

Άρα $P(x)=(x-2)(x-1)(x^2+x-2)$

Επομένως $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=1 \\ \text{ή} \\ x=1 \text{ ή } x=-2 \end{cases}$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι το 1 (διπλή ρίζα) το 2 και το -2

Β3. Η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία

$\dfrac{P(x)}{x-1}\geq 0$ και $x-1\neq 0 \Leftrightarrow P(x)(x-1)\geq 0$ και $x\neq 1$

Έχουμε

$P(x)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x^2+x-2)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2(x^2+x-2)\geq 0$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-2$		-		-		-	0	+	
$(x-1)^2$		+		+	0	+		+	
x^2+x-2		+	0	-	0	+		+	
$(x-2)(x-1)^2(x^2+x-2)$		-	0	+	‖	-	0	+	

Άρα $x\in[-2,1)\cup[2,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\etaμ(5\pi - x) = \etaμ(4\pi + \pi - x) = \etaμ(\pi - x) = \etaμx$

$συν(3\pi + x) = συν(2\pi + \pi + x) = συν(\pi + x) = -συνx$

$συν(4\pi - x) = συν(-x) = συνx$

$\etaμ\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\etaμ\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = -\etaμ\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\etaμ\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -συνx$

Άρα η παράσταση $A = \etaμ^2(5\pi - x) + συν(3\pi + x) \cdot συν(4\pi - x) + 2\etaμ^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$

με βάση τα παραπάνω γίνεται

$A = \etaμ^2x + (-συνx) \cdot συνx + 2(-συνx)^2 = \etaμ^2x - συν^2x + 2συν^2x = \etaμ^2x + συν^2x = 1$

Γ2. Γνωρίζουμε ότι η περίοδος της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Ισχύει $T = \pi$ άρα $\omega = 2$ οπότε $f(x) = 1 + Bσυν(2x)$

1ος τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le συν2x \le 1$ όπου το 1 και το -1 είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμής του $συν2x$

Οπότε : $-1 \le συν2x \le 1 \overset{B<0}{\Leftrightarrow} -B \ge Bσυν2x \ge B \Leftrightarrow 1 - B \ge 1 + Bσυν2x \ge 1 + B$

Επομένως $1 + B \le f(x) \le 1 - B$

Από υπόθεση έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι 5 άρα

$$1 - B = 5 \Leftrightarrow B = -4 \text{ άρα } \boxed{f(x) = 1 - 4συν(2x)}$$

Η ελάχιστη τιμή της f είναι το $1 + B$ δηλαδή $1 + B = 1 - 4 = -3$

2ος τρόπος

Η συνάρτηση $y = Bσυν(2x), B < 0$ (1) είναι συμμετρική της $y = -Bσυν(2x), B < 0$ ως προς τον άξονα $x'x$ οπότε έχουν την ίδια μέγιστη και την ίδια ελάχιστη τιμή στο $\mathbb{R}$.

Η $y = -Bσυν(2x), B < 0$ έχει μέγιστο το $-B$ και ελάχιστο το B

Άρα και η (1) έχει μέγιστο το $-B$ και ελάχιστο το B

Επομένως η $f(x)=1+B\sigma\upsilon\nu(2x), B<0$ έχει μέγιστο το $1-B$ και ελάχιστο το $1+B$

Άρα $1-B=5 \Leftrightarrow B=-4$

Γ3. Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=3, x\in[-\pi,\pi]$

$$f(x)=3 \Leftrightarrow 1-4\sigma\upsilon\nu 2x=3 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu 2x=2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 2x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

$\boxed{x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}}$	$\boxed{x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3}}$
$-\pi\le x\le\pi$	$-\pi\le x\le\pi$
$-\pi\le\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\le\pi$	$-\pi\le\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\le\pi$
$-1\le\kappa+\frac{1}{3}\le 1$	$-1\le\kappa-\frac{1}{3}\le 1$
$-\frac{4}{3}\le\kappa\le\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}\le\kappa\le\frac{4}{3}$
επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε $\kappa=-1$ και $\kappa=0$	επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε $\kappa=0$ και $\kappa=1$
άρα $x=-\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{\pi}{3}$	άρα $x=-\frac{\pi}{3}$ και $x=\frac{2\pi}{3}$

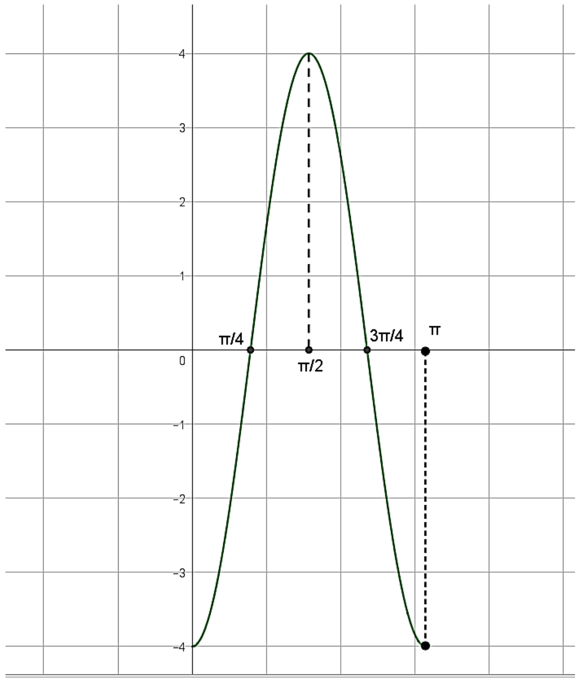
Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=3$, $x\in[-\pi,\pi]$

είναι τα $A\left(-\frac{2\pi}{3},3\right), B\left(-\frac{\pi}{3},3\right)\ \Gamma\left(\frac{\pi}{3},3\right)$ και $\Delta\left(\frac{2\pi}{3},3\right)$

Γ4. α) $g(x)=f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)=-4συν2x, x\in[0,\pi]$

Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T=\pi$, έχει μέγιστο το 4 και ελάχιστο το -4

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$συν2x$	1	0	-1	0	1
$g(x)=-4συν2x$	-4	0	4	0	-4



Άρα $g(x)>0$ όταν $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

$g(x)<0$ όταν $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x)\cdot(\pi-4x)\cdot(x^2-\pi x)>0$.

Βρίσκουμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα ξεχωριστά

$g(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$ ή $\boxed{x=\frac{3\pi}{4}}$

$\pi-4x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$x^2-\pi x=0 \Leftrightarrow x(x-\pi)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g(x)$		-	0	+	0	-	
$\pi-4x$		+	0	-		-	
$x^2-\pi x$	0	-		-		-	0
$g(x)\cdot(\pi-4x)\cdot(x^2-\pi x)$	0	+	0	+	0	-	0

Άρα $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Α΄τρόπος

Από το γράφημα της f προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Β΄τρόπος

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-1<x_2-1$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι $f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

(β) $f(x)=x \Leftrightarrow \ln x+x-1=x \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$ Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ln x+x-1$ και $y=x$ τέμνονται στο σημείο $A(e,e)$

Δ2. $\ln 3 > e-2 \Leftrightarrow \ln 3 + 2 > e \Leftrightarrow f(3) > f(e) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} 3 > e$

Β τρόπος : $\ln 3 > 1 > e-2$

Δ3. $f(e^x) = e^{3x} - e^{2x} + x \Leftrightarrow \ln e^x + e^x - 1 = e^{3x} - e^{2x} + x \Leftrightarrow e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}(e^x-1) - (e^x-1) = 0 \Leftrightarrow (e^x-1)(e^{2x}-1) = 0$

$\Leftrightarrow (e^x-1)(e^x-1)(e^x+1) = 0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2(e^x+1) = 0 \overset{e^x+1\neq 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Δ4. Η $\dfrac{f(x)-e}{f(x)-x+1}$ ορίζεται για $x>0$ και $f(x)-x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $\dfrac{f(x)-e}{f(x)-x+1} < 0 \Leftrightarrow (f(x)-e)(f(x)-x+1) < 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο του κάθε παράγοντα

$f(x)-e=0 \Leftrightarrow f(x)=e \Leftrightarrow x=e$

$f(x)-e>0 \Leftrightarrow f(x)>e \Leftrightarrow f(x)>f(e) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x>e$

$f(x)-x+1=0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(x)-x+1>0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)-e$		-		-	0	+	
$f(x)-x+1$		-	0	+		+	
$(f(x)-e)(f(x)-x+1)$		+	‖	-		+	

Άρα $x \in (1, e)$