ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 25 σχολικού βιβλίου

Α2. Απόδειξη σελίδα 33 σχολικού βιβλίου

Α3. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\vec{\alpha}=3\vec{i}-\vec{j}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=(3,-1)$, και έστω $\vec{\gamma}=(x,y)$ τότε

$$\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}=\vec{\beta}\Leftrightarrow(3,-1)+2(x,y)=(5,3)\Leftrightarrow(3+2x,-1+2y)=(5,3)$$

Από την τελευταία ισότητα έχουμε $\begin{cases}3+2x=5\\2y-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2\\2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

άρα $\vec{\gamma}=(1,2)$

Β2. Η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ επομένως

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_{\vec{\gamma}}\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{2}{1}\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=2$$

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-1,4)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=2$ έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon):y-4=2\cdot(x-(-1))\Leftrightarrow y-4=2(x+1)\Leftrightarrow y-4=2x+2\Leftrightarrow\boxed{y=2x+6}$$

Β3. Για τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες έχουμε

Για τον $x'x$ $\begin{cases} y=0 \\ y=2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$ άρα $B(-3,0)$

Για τον $y'y$ $\begin{cases} x=0 \\ y=2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2\cdot 0+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$ άρα $\Gamma(0,6)$

(i) Μ μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_\Gamma}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_\Gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\dfrac{3}{2} \\ y_M = 3 \end{cases} \quad \text{άρα } M\left(-\frac{3}{2},3\right)$$

Η ευθεία ΟΜ συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{OM} = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} \Leftrightarrow \lambda_{OM} = \frac{3-0}{-\frac{3}{2}-0} \Leftrightarrow \lambda_{OM} = -2$$

Άρα η ευθεία ΟΜ περνάει από το $M\left(-\frac{3}{2},3\right)$ και έχει κλίση $\lambda_{OM} = -2$ οπότε η εξίσωσή της είναι $\varepsilon_{OM}: y-3 = -2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y-3 = -2x-3 \Leftrightarrow y=-2x$

Παρατήρηση : Θα μπορούσαμε να γράψουμε απευθείας την εξίσωση ευθείας ΟΜ αφού θα είναι της μορφής $y=\lambda x$,διότι περνάει από το $O(0,0)$

(ii) Αφού ΟΚ το ύψος του τριγώνου ΟΒΓ τότε

$$OK \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{OK}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -\frac{1}{2}$$

Αφού $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \dfrac{6-0}{0-(-3)} \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = 2$

Άρα η ευθεία ΟΚ έχει εξίσωση $\varepsilon_{OK}: y = -\frac{1}{2}x$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ευθεία ΟΑ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$,όπου $\omega = \frac{\pi}{3}$ άρα $\lambda = \sqrt{3}$ επομένως έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}x$.

Άρα το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = \sqrt{3}x$.

Το σημείο Γ βρίσκεται στο ημιάξονα Οx και η απόστασή του από το Ο είναι 4cm άρα έχει συντεταγμένες $\Gamma(4,0)$.

Το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A\left(x_A, \sqrt{3}x_A\right)$.

Αν A' η προβολή του Α πάνω στον Οx τότε $A'(x_A, 0)$ άρα

$(AA') = \sqrt{3}x_A, (OA') = x_A$ και $(OA) = 4$ οπότε εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAA' προκύπτει

$$(OA)^2 = (AA')^2 + (OA')^2 \Leftrightarrow 16 = 3{x_A}^2 + {x_A}^2 \Leftrightarrow 4{x_A}^2 = 16 \Leftrightarrow {x_A}^2 = 4 \overset{x_A>0}{\Leftrightarrow} x_A = 2$$

Άρα $A\left(2, 2\sqrt{3}\right)$

Το σημείο Β έχει την ίδια τεταγμένη με το σημείο Α ενώ οι τετμημένες τους διαφέρουν κατά 4cm, δηλαδή $x_B - x_A = 4 \Leftrightarrow x_B = 6$

Άρα $B\left(6, 2\sqrt{3}\right)$

Γ2. Το Κ είναι κοινό μέσο των ΑΓ και ΟΒ άρα

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\ y_K = \dfrac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{6+0}{2} \\ y_K = \dfrac{2\sqrt{3}+0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 3 \\ y_K = \sqrt{3} \end{cases} \text{ οπότε } K\left(3, \sqrt{3}\right)$$

Η πλευρά ΟΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = 0$

Η πλευρά ΑΒ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = 2\sqrt{3}$

Η πλευρά ΟΑ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = \sqrt{3}x$

Η ευθεία ΒΓ είναι παράλληλη στην ΟΑ και διέρχεται από το $\Gamma(4,0)$ άρα έχει

εξίσωση $y - 0 = \sqrt{3}(x-4) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$.

Γ3. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αφού όλα τα σημεία που υπάρχουν είναι γνωστά .

$\overrightarrow{OA}=\left(2,2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(6,2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BA}=(-4,0)$, $\overrightarrow{KA}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{KB}=\left(3,\sqrt{3}\right)$

i) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(2,2\sqrt{3}\right)\cdot\left(6,2\sqrt{3}\right)=12+12=24$

ii) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(2,2\sqrt{3}\right)\cdot(-4,0)=-8$

iii) $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=\left(-1,\sqrt{3}\right)\cdot\left(3,\sqrt{3}\right)=0$

iv) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AO}=\left(1,-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2,-2\sqrt{3}\right)=-2+6=4$

Γ4. Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γίνεται :

$$\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\left(\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\left(\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{BK}\right)+\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma K}+\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma K}-\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}^2=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma K}+\overrightarrow{\Gamma K}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma K}\left(\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{AM}\right)+\overrightarrow{OA}^2=0$$

Έχουμε $\overrightarrow{\Gamma K}=\left(-1,\sqrt{3}\right)$,$\overrightarrow{\Gamma M}=(x-4,y)$, $\overrightarrow{AM}=\left(x-2,y-2\sqrt{3}\right)$

και $\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{AM}=(x-4,y)+\left(x-2,y-2\sqrt{3}\right)=\left(2x-6,2y-2\sqrt{3}\right)$

ενώ $\overrightarrow{OA}^2=(OA)^2=16$

Άρα $\left(-1,\sqrt{3}\right)\cdot\left(2x-6,2y-2\sqrt{3}\right)+16=0\Leftrightarrow-2x+6-2\sqrt{3}y-6+16=0$

$$\Leftrightarrow2\sqrt{3}y=2x-16\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

άρα τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\left(\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Η διαγώνιος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{ΑΓ}} = \dfrac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

Επειδή $\lambda \cdot \lambda_{\text{ΑΓ}} = -\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = -1$ οι ευθείες τέμνονται κάθετα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} |\vec{\alpha}| & 1 \\ |\vec{\beta}| & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ (1)

Επίσης $|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| = 5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |\vec{\alpha}| + 4|\vec{\alpha}| = 5 \Leftrightarrow 5|\vec{\alpha}| = 5 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 1$

Άρα $|\vec{\beta}| = 2$

Επομένως $\vec{u} = (1,1)$ και $\vec{v} = (2,2)$, από τις συντεταγμένες των $\vec{u},\vec{v}$ προκύπτει

$\vec{v} = (2,2) = 2\cdot(1,1) = 2\vec{u}$ άρα $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

Δ2. $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta})0 \Leftrightarrow 5\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 5\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow 5 + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 8 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 1$

Επομένως για την γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ έχουμε

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{1}{2} \text{ άρα } \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Δ3. Υπολογίζουμε πρώτα τα $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$, $|\vec{v}-\vec{u}|$

$|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4-4+4 = 4$ άρα $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = 2$

$\vec{v}-\vec{u} = (2,2)-(1,1) = (1,1)$ άρα $|\vec{v}-\vec{u}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Άρα η εξίσωση $4\cdot\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|x=\sqrt{2}\cdot\left|\vec{v}-\vec{u}\right|$ γίνεται $8x=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\vec{\alpha}\left(y\cdot\vec{\alpha}+2\cdot\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|}\cdot\vec{\alpha}=\left(1-y\right)\cdot\vec{\alpha}\Leftrightarrow\frac{y\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{1+2}\cdot\vec{\alpha}=\left(1-y\right)\cdot\vec{\alpha}\Leftrightarrow\left(\frac{y+2}{3}\right)\cdot\vec{\alpha}=\left(1-y\right)\cdot\vec{\alpha}$$

Από την τελευταία ισότητα αφού $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ προκύπτει

$$\frac{y+2}{3}=1-y\Leftrightarrow y+2=3-3y\Leftrightarrow 4y=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}$$

Δ4. Αφού $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με τον Ox τότε $\vec{\alpha}=\left(x,0\right),x>0$

Ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+0^2}=1\Leftrightarrow x=1$ άρα $\vec{\alpha}=\left(1,0\right)$

Η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha},\vec{u}$ είναι

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{u}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}\Leftrightarrow\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{u}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{u}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{άρα}\ \left(\vec{\alpha},\vec{u}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Οπότε $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{u}}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$