



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σελίδα 61 σχολικού βιβλίου
A2. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2(6 - 2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 12 + 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_0, y_0) = (2, 2)$

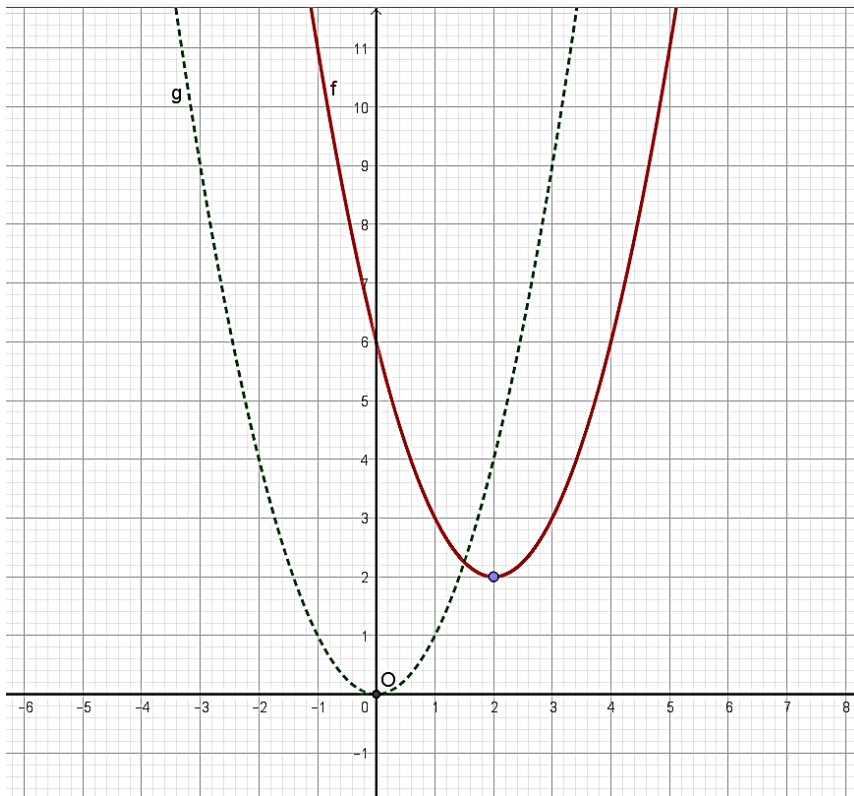
Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ τέμνει τον άξονα y/y στο σημείο $A(0, 6)$

$$\text{Άρα } f(0) = 6 \Leftrightarrow 0^2 - 4 \cdot 0 + \alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

$$\text{Επομένως } f(x) = x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 + 2 \Leftrightarrow f(x) = (x - 2)^2 + 2$$

B2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$ ως εξής

- Μία οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδες προς τα δεξιά
- Μια κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες προς τα πάνω



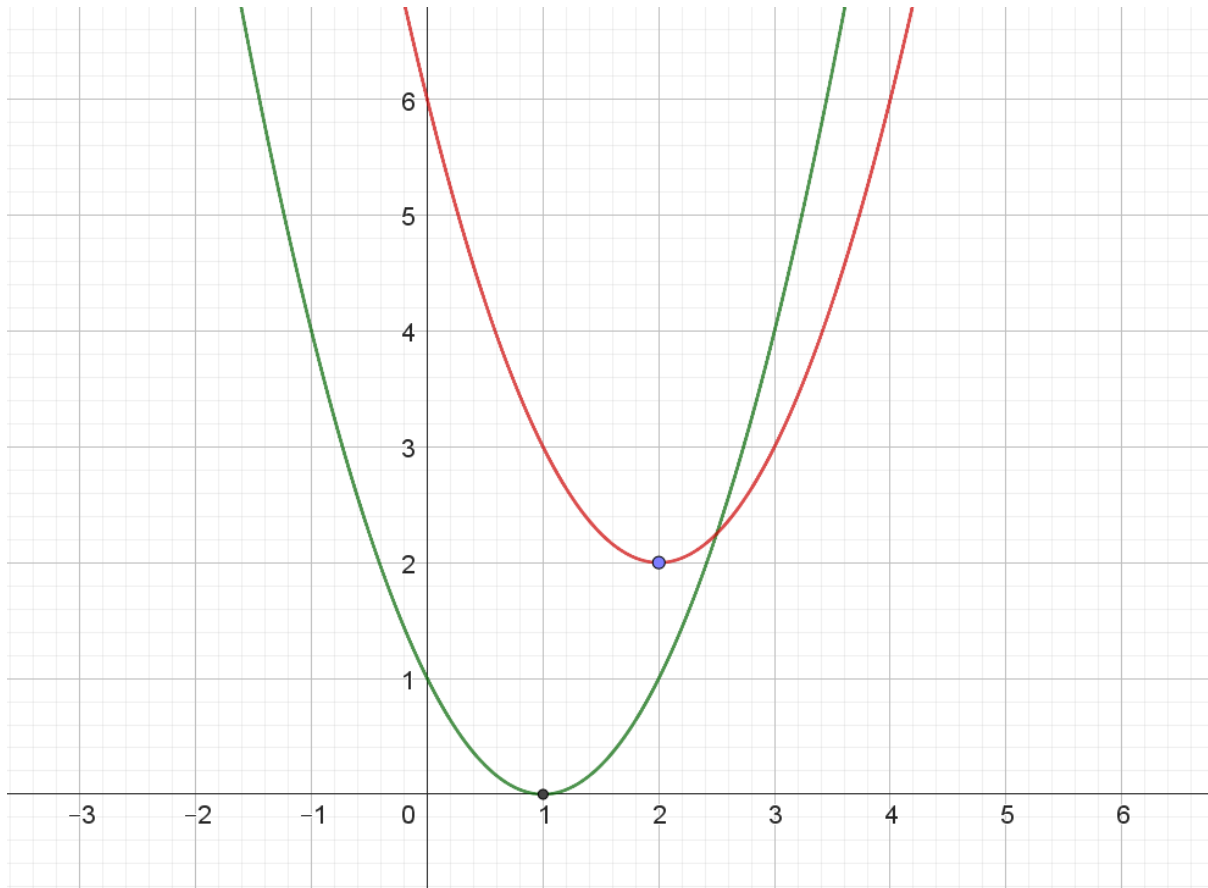
B3. Οι αριθμοί $\frac{1}{2022}, \frac{1}{2023}$ βρίσκονται στο διάστημα $(-\infty, 2]$ όπου η συνάρτηση f όπως φαίνεται και από το σχήμα του ερωτήματος **B2** είναι γνησίως φθίνουσα

$$\text{Επομένως } \frac{1}{2023} < \frac{1}{2022} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2023}\right) > f\left(\frac{1}{2022}\right)$$

B4. Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει από την γραφική παράσταση της f με μια οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά και μία κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες προς τα κάτω τότε

$$h(x) = f(x+1) - 2 \text{ δηλαδή } h(x) = (x+1-2)^2 + 2 - 2 \Leftrightarrow h(x) = (x-1)^2$$

- B5.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων



Για να είναι η εξίσωση $f(x) = c$ αδύνατη θα πρέπει $c < 2$ αφού το 2 είναι η ελάχιστη τιμή της f .

Για να έχει η εξίσωση $h(x) = c$ δύο ακριβώς λύσεις πρέπει $c > 0$

Επομένως $0 < c < 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τους όρους της παράστασης A έχουμε

- $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\eta\mu\alpha$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

- $\eta\mu(\alpha - \pi) = \eta\mu(-(\pi - \alpha)) = -\eta\mu(\pi - \alpha) = -\eta\mu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(22\pi + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
 $= \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\alpha$
- $\eta\mu(11\pi + \alpha) = \eta\mu(10\pi + \pi + \alpha) = \eta\mu(\pi + \alpha) = -\eta\mu\alpha$

Άρα η παράσταση Α γίνεται $A = \frac{-\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (-\eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\alpha \cdot (-\eta\mu\alpha)} = -1$

Γ2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\sigma\upsilon\nu^2 x \neq 0$.

$$\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή } x \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z} \\ x \neq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Άρα $A_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z} \right\}$

Για κάθε $x \in A_f$ έχουμε $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu^2 x} = \frac{1 - \eta\mu x}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)} = \frac{1}{1 + \eta\mu x}$

Γ3. $f(x) = 2, x \in A_f$ επομένως $\frac{1}{1 - \eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2 - 2\eta\mu x \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Βρίσκουμε τις λύσεις που βρίσκονται στο διάστημα $(0, 3\pi)$

<p>Για $x = 2κπ + \frac{\pi}{6}, κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε</p> $0 \leq x \leq 3\pi \Leftrightarrow$ $0 \leq 2κπ + \frac{\pi}{6} \leq 3\pi \Leftrightarrow$ $0 \leq 2κ + \frac{1}{6} \leq 3 \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{6} \leq 2κ \leq 3 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{6} \leq 2κ \leq \frac{17}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{12} \leq κ \leq \frac{17}{12}$ <p>Οι μοναδικοί ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $\left[-\frac{1}{12}, \frac{17}{12}\right]$</p> <p>Είναι το 0 και το 1</p> <p>Άρα $x = \frac{\pi}{6}$ και $x = 2π + \frac{\pi}{6} = \frac{13π}{6}$</p>	<p>Για $x = 2κπ + \frac{5π}{6}, κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε</p> $0 \leq x \leq 3\pi \Leftrightarrow$ $0 \leq 2κπ + \frac{5π}{6} \leq 3\pi \Leftrightarrow$ $0 \leq 2κ + \frac{5}{6} \leq 3 \Leftrightarrow$ $-\frac{5}{6} \leq 2κ \leq 3 - \frac{5}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{5}{6} \leq 2κ \leq \frac{13}{6} \Leftrightarrow$ $-\frac{5}{12} \leq κ \leq \frac{13}{12}$ <p>Οι μοναδικοί ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $\left[-\frac{5}{12}, \frac{13}{12}\right]$</p> <p>Είναι το 0 και το 1</p> <p>Άρα $x = \frac{5π}{6}$ και $x = 2π + \frac{5π}{6} = \frac{17π}{6}$</p>
---	---

Γ4. $f(\omega) \cdot \eta\mu^2\omega \cdot f(-\omega) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\eta\mu\omega} \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \frac{1}{1+\eta\mu(-\omega)} = 3 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{(1+\eta\mu\omega)(1-\eta\mu\omega)} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{1-\eta\mu^2\omega} = 3 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$ $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
 $\varepsilon\varphi\omega < 0$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+(-\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$ $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
 $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$

Ενναλακτικά

$$\text{Αφού } \varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3} \text{ και } \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ τότε } \omega = \frac{2\pi}{3} \text{ άρα } \text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ**Δ1.** Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της είναι το 2 άρα

$$\rho = 2. \text{ Η περίοδος της είναι } T = 4 \text{ άρα } \frac{2\pi}{\omega} = 4 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επομένως } f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$$

Το σημείο $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης δηλαδή $f(0) = 0$ Όμως για την $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(0) = 2$ άποπό ενώ για την $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(0) = 0$ επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$$

Για την $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right), x \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή επομένως έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.**Δ2.** Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0 \stackrel{f(-x)=-f(x)}{\Leftrightarrow} -f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

Ισχύει $2 < \frac{9}{\pi} < 3$ και στο διάστημα $(2,3)$ η f παίρνει αρνητικές τιμές άρα $f\left(\frac{9}{\pi}\right) < 0$

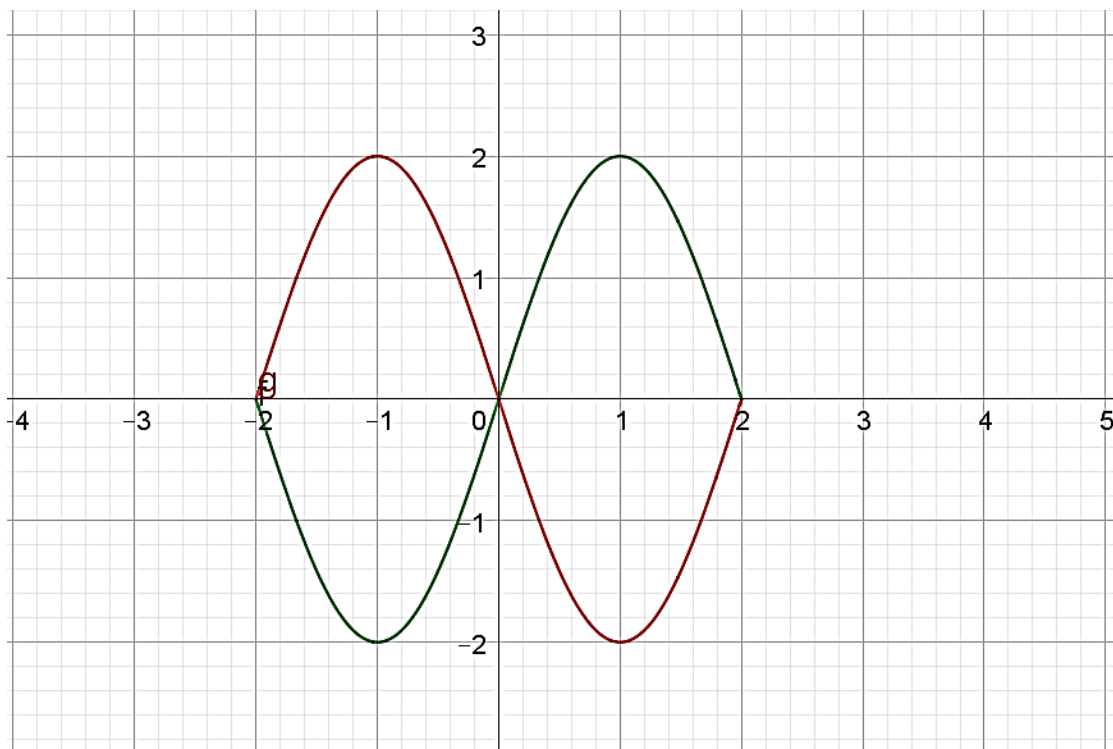
Ισχύει $1 < \frac{\pi}{3} < 2$ και στο διάστημα $(1, 2)$ η f παίρνει θετικές τιμές άρα $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$

Δ3.

$$(i) \quad g(x) = f(x+2) = 2\eta\mu\left[\frac{\pi}{2}(x+2)\right] = 2\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2}x\right) = -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -f(x)$$

(ii) Άρα η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.

Οι γραφικές τους παραστάσεις στο διάστημα $[-2, 2]$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



$$f(x) = g(x) + c \Leftrightarrow f(x) = -f(x) + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{c}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{c}{4}$$

Πρέπει $\frac{c}{4} = -1$ ή $\frac{c}{4} = 1$ άρα $c = -4$ ή $c = 4$ και επειδή $c > 0$ δεκτή η $c = 4$

$$\Delta 4. \quad f^2(-x) + g^2(x) = 2f^2(-1) \Leftrightarrow (-f(x))^2 + (-f(x))^2 = 2 \left[2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^2(x) + f^2(x) = 8 \Leftrightarrow f^2(x) = 4 \Leftrightarrow f(x) = 2 \text{ ή } f(x) = -2$$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa + 1$$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa - 1, \kappa \in \mathbb{Z}$$