



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για κάθε γωνία ω με $\sin \omega \neq 0$ και $\eta \omega \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\epsilon \omega \cdot \sigma \omega = 1$.

Μονάδες 15

Α2. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε γραμμικό σύστημα 2×2 έχει πάντα λύση.

β) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta \mu(90^\circ - \omega) = \sigma \nu(-\omega)$.

γ) Αν η συνάρτηση φ είναι άρτια στο \mathbb{R} τότε και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \varphi(x) - c$, $x \in \mathbb{R}$ θα είναι άρτια.

δ) Αν για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο \mathbb{R} .

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon \varphi x$ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ και η συνάρτηση f με τύπο

$f(x) = x^2 - 4x + \alpha, x \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $A(0,6)$.

B1. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_0, y_0) = (2, 2)$ και ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - x_0)^2 + y_0$.

Μονάδες 7

B2. Αν $g(x) = x^2$ να γράψετε με τι είδους μετατοπίσεις θα προκύψει το γράφημα της $f(x)$ από τη γραφική παράσταση της $g(x)$ και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, g .

Μονάδες 6

B3. Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{1}{2022}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2023}\right)$.

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ της οποίας το γράφημα προκύπτει από αυτό της $f(x)$ με μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά και 2 μονάδες κάτω.

Μονάδες 4

B5. Αν $h(x) = (x-1)^2$ να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = c$ είναι αδύνατη και συγχρόνως η εξίσωση $h(x) = c$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Μονάδες 4

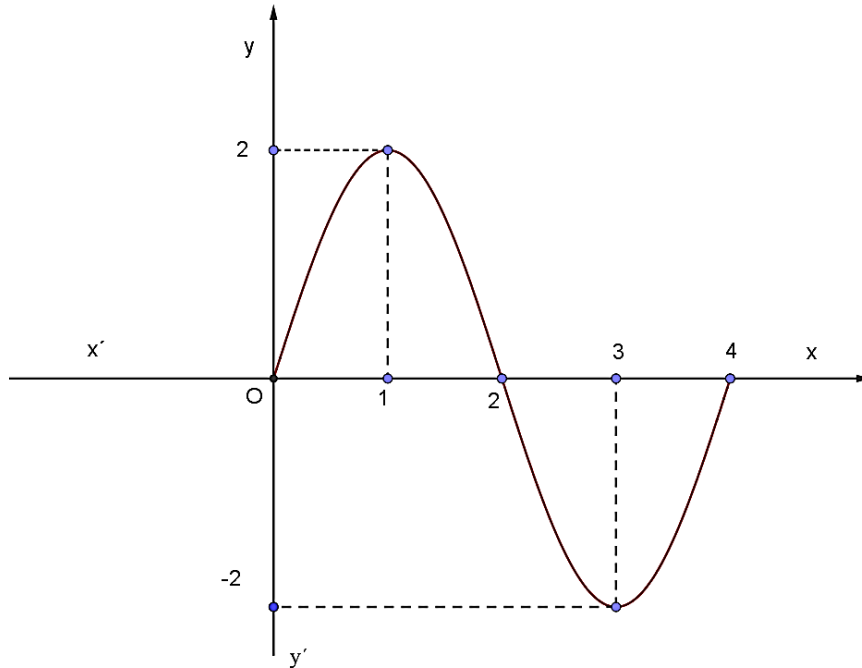
ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \eta\mu(\alpha - \pi)}{\sin(22\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu(11\pi + \alpha)}$$

και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{\sin^2 x}$ **Γ1.** Να αποδείξετε ότι $A = -1$.**Μονάδες 6****Γ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και έπειτα να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{1 - \eta\mu x}$.**Μονάδες 6****Γ3.** Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -2 \cdot A$ στο διάστημα $[0, 3\pi]$.**Μονάδες 6****Γ4.** Αν για την γωνία ω ισχύει $f(\omega) \cdot \eta\mu^2 \omega \cdot f(-\omega) = 3$ με $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ να βρείτε το $\sin \omega$.**Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ



Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ ή $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ όπου $\rho, \omega > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου της.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ και ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{9}{\pi}\right) \cdot f\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$.

Μονάδες 5

Δ3. Αν $g(x)$ συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από τη C_f με οριζόντια μετατόπιση κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2ΓΑ(ε)**

- ii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της g και της f στο διάστημα $[-2, 2]$ και να βρείτε την τιμή του $c > 0$ ώστε η εξίσωση $f(x) = g(x) + c$ να έχει μοναδική λύση.

Μονάδες 4

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $f^2(-x) + g^2(x) = 2 \cdot f^2(-1)$.

Μονάδες 7