**ΤΑΞΗ:** **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Ημερομηνία: Παρασκευή 7 Ιανουαρίου 2022**
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

---

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σελίδα 60.Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

**Α2.** Σελίδα 31.Ορισμός.

**Α3.** 1.Λ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Αν λ = 1,τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=1$.
Το τελευταίο έχει άπειρες λύσεις, επομένως οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται (συμπίπτουν).
Αν λ = -1, τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$.
Το τελευταίο είναι αδύνατο, επομένως οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

**Β2.** Η σχετική θέση των ευθειών εξαρτάται από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων τους, δηλαδή από το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=\lambda^2 \\ x+\lambda y=1 \end{cases} (\Sigma)$

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1),\ D_y=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=-\lambda(\lambda-1)$$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1 \kappa\alpha\iota \lambda\neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$(\Sigma)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \\ y=\dfrac{-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1} \\ y=\dfrac{-\lambda}{\lambda+1} \end{cases}$$, επομένως οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $M\left(\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1},-\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)$.

**Β2.** Αν λ = 0, τότε από Β1, οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $M\left(\dfrac{0^2+0+1}{0+1},-\dfrac{0}{0+1}\right)$, δηλαδή $M(1,0)$. Το σημείο $M(1,0)$ προφανώς ανήκει και στην ευθεία $\varepsilon_3$, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, συνεπώς οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ διέρχονται από το σημείο $M(1,0)$.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** $2\eta\mu 2\alpha-\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-\eta\mu^3 2\alpha=\eta\mu 2\alpha(2-\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-\eta\mu^2 2\alpha)=$

$\eta\mu 2\alpha[2-(\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha+\eta\mu^2 2\alpha)]=\eta\mu 2\alpha(2-1)=\eta\mu 2\alpha.$

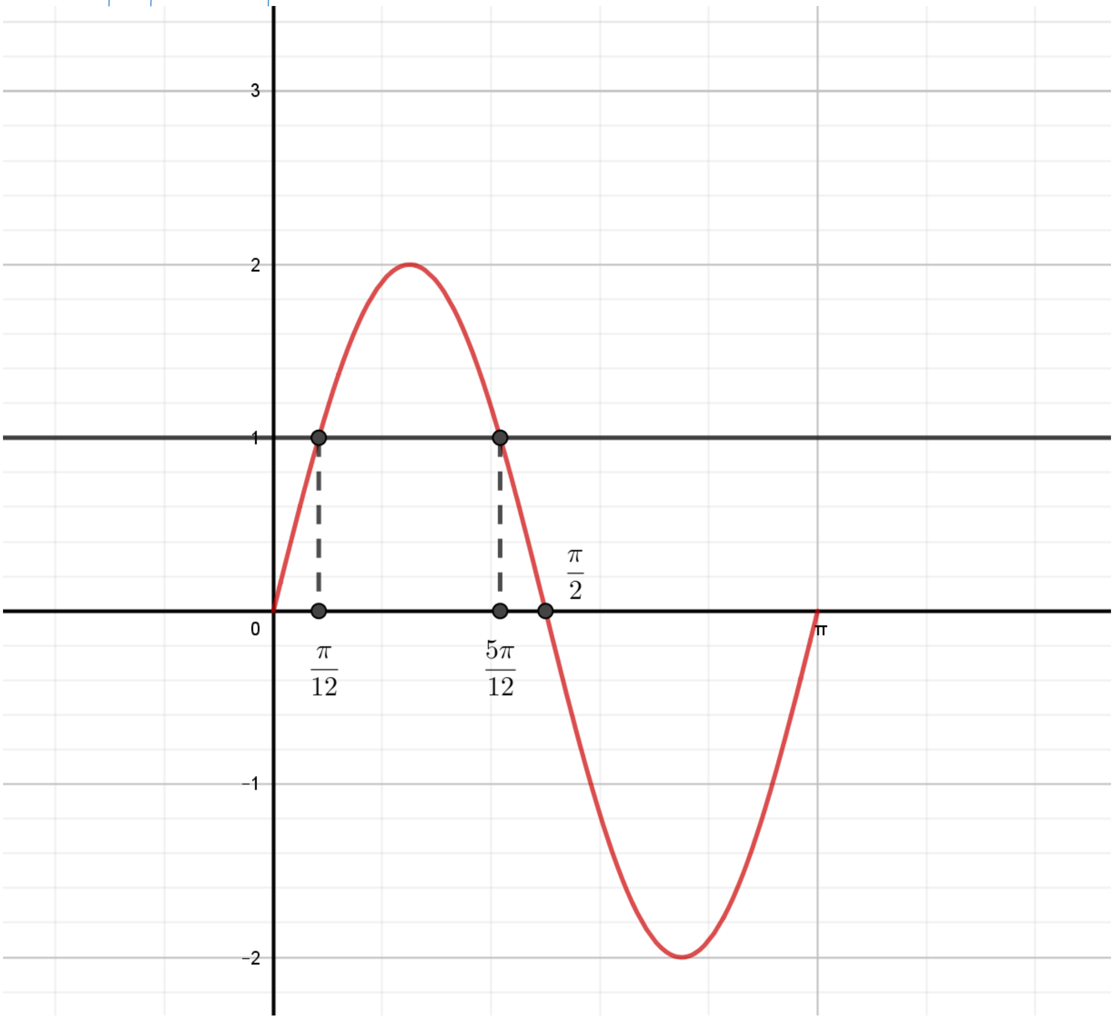
**Γ2.**

i) $f(x)=2(2\eta\mu 2x-\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu^2 2x-\eta\mu^3 2x)$ Από Γ1, αν θεωρήσουμε $\alpha=2x$ τότε $f(x)=2\eta\mu 2x, A=\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R},-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=2\eta\mu 2(-x)=-2\eta\mu 2x=-f(x)$. Η συνάρτηση είναι περιττή.

ii) Από θεωρία είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x),\rho>0$ έχει ελάχιστο –ρ, μέγιστο ρ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Για ρ = 2 και ω = 2, προκύπτει, Μέγιστη τιμή 2, Ελάχιστη -2 και περίοδος $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

**Γ3.** Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |




**Γ4.** $f(x)=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 2x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{12} \end{cases} \kappa\in\mathbb{Z}.$ Επειδή, $x\in[0,\pi] \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}$ ή $x=\frac{5\pi}{12}$.

Στο σχήμα του Γ3 επαληθεύεται από τη γραφική παράσταση ότι η ευθεία $y = 1$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία που ασφαλώς έχουν τετμημένες $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για να έχει νόημα το $f(x)$ πρέπει $\alpha - \eta\mu^2 x \neq 0$. Για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu^2 x = 1$.

Από τα προηγούμενα και το πεδίο ορισμού Α συμπεραίνουμε ότι

$\alpha - \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

**Δ2. i)** Έχουμε $\sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x \ge 0$ και $1 - \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x > 0$ για $x \in A$. Επομένως

$f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in A$

**ii)** Παρατηρούμε ότι για x=0 είναι f(0)=0. Άρα $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0)$ για κάθε $x \in A$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x=0 και συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο.

**Δ3. i)** Από την υπόθεση έχουμε $g(x) = f(x-\pi) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu(x-\pi)}{1-(\eta\mu(x-\pi))^2} = \frac{1-(-\sigma\upsilon\nu x)}{1-(-\eta\mu x)^2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}$

**ii)** α΄ τρόπος

$$g^2(x) > f^2(x) \Leftrightarrow g^2(x) - f^2(x) > 0 \Leftrightarrow (g(x)+f(x)(g(x)-f(x)>0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x} + \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x} - \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\;\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{\sigma\upsilon\nu^3 x} > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^3 x > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0$$

Η τελευταία είναι αληθής στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ επομένως , λόγω των ισοδυναμιών αληθεύει και η αρχική.

β΄ τρόπος

$$g^2(x) = \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)^2 = \frac{1+\sigma\upsilon\nu x^{\;2}}{(\sigma\upsilon\nu^2 x)^2} = \frac{1+2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}$$

$$f^2(x) = \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}\right)^2 = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x^{\;2}}{(\sigma\upsilon\nu^2 x)^2} = \frac{1-2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}$$

$$g^2(x) - f^2(x) = \frac{1+2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} - \frac{1-2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} = \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$$

Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$συνx > 0$ άρα και $συν^3x > 0$ επομένως $\frac{4}{συν^3x} > 0$. Έτσι έχουμε τελικά

$g^2(x) - f^2(x) > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > f^2(x)$